



Môn học

LÝ THUYẾT ĐIỀU KHIỂN TỰ ĐỘNG

Giảng viên: TS. Huỳnh Thái Hoàng

Bộ môn Điều Khiển Tự Động

Khoa Điện – Điện Tử

Đại học Bách Khoa TP.HCM

Email: hthoang@hcmut.edu.vn

Homepage: <http://www2.hcmut.edu.vn/~hthoang/>

Chương 3

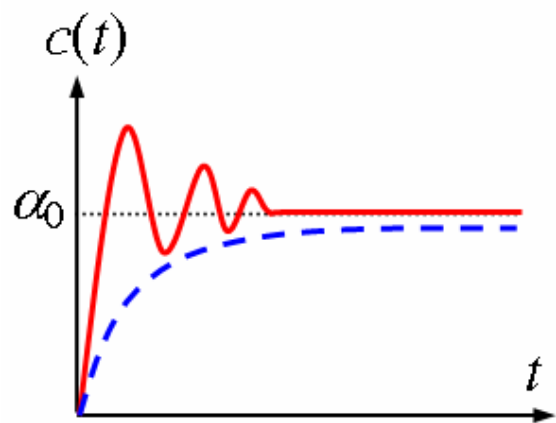
KHẢO SÁT TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA HỆ THỐNG

- ★ Khái niệm ổn định
- ★ Tiêu chuẩn ổn định đại số
 - ▲ Điều kiện cần
 - ▲ Tiêu chuẩn Routh
 - ▲ Tiêu chuẩn Hurwitz
- ★ Phương pháp quỹ đạo nghiệm số (QĐNS)
 - ▲ Khái niệm về QĐNS
 - ▲ Phương pháp vẽ QĐNS
 - ▲ Xét ổn định dùng QĐNS
- ★ Tiêu chuẩn ổn định tần số
 - ▲ Khái niệm về đặc tính tần số
 - ▲ Đặc tính tần số của các khâu cơ bản
 - ▲ Đặc tính tần số của hệ thống tự động
 - ▲ Tiêu chuẩn ổn định Bode
 - ▲ Tiêu chuẩn ổn định Nyquist

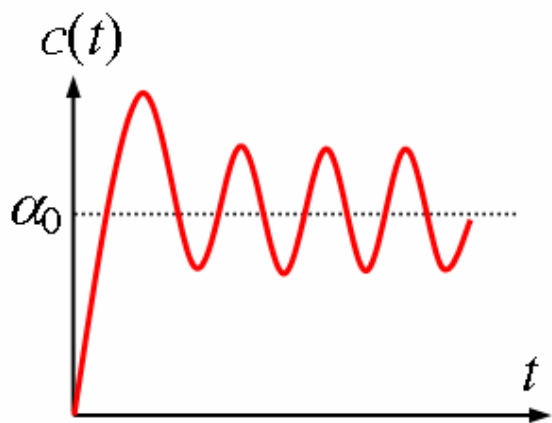
Khái niệm ổn định

Định nghĩa ổn định BIBO

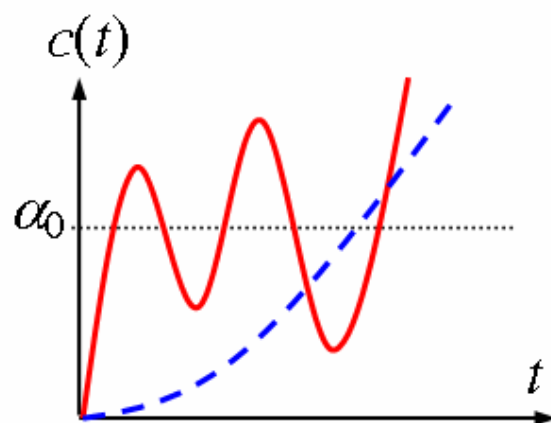
- ★ Hệ thống được gọi là ổn định BIBO (Bounded Input Bounded Output) nếu đáp ứng của hệ bị chặn khi tín hiệu vào bị chặn.



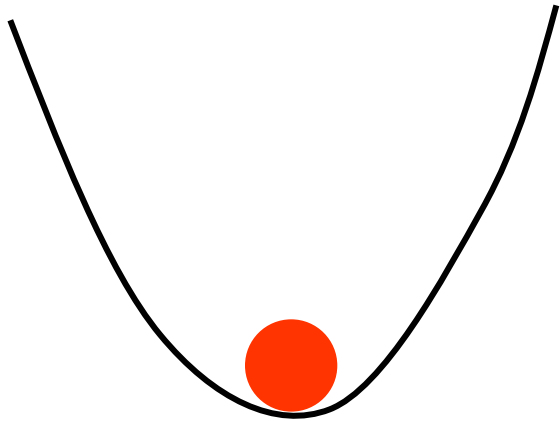
HT ổn định



HT ở biên giới ổn định



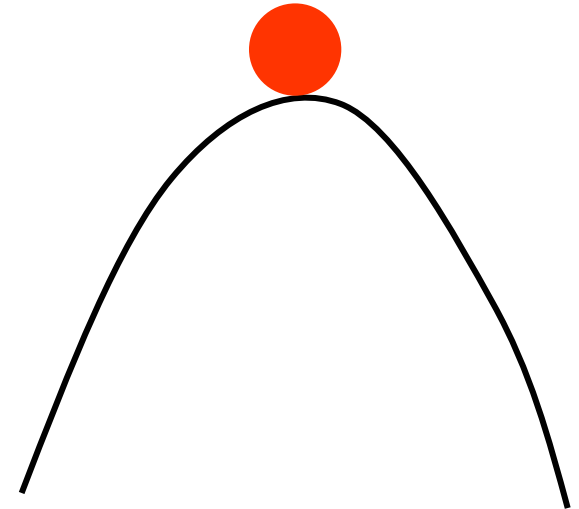
HT không ổn định



HT ổn định



HT ở biên
giới ổn định



HT không ổn định

Cực và zero

★ Cho hệ thống tự động có hàm truyền là:

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

★ Đặt: $A(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n$ mẫu số hàm truyền

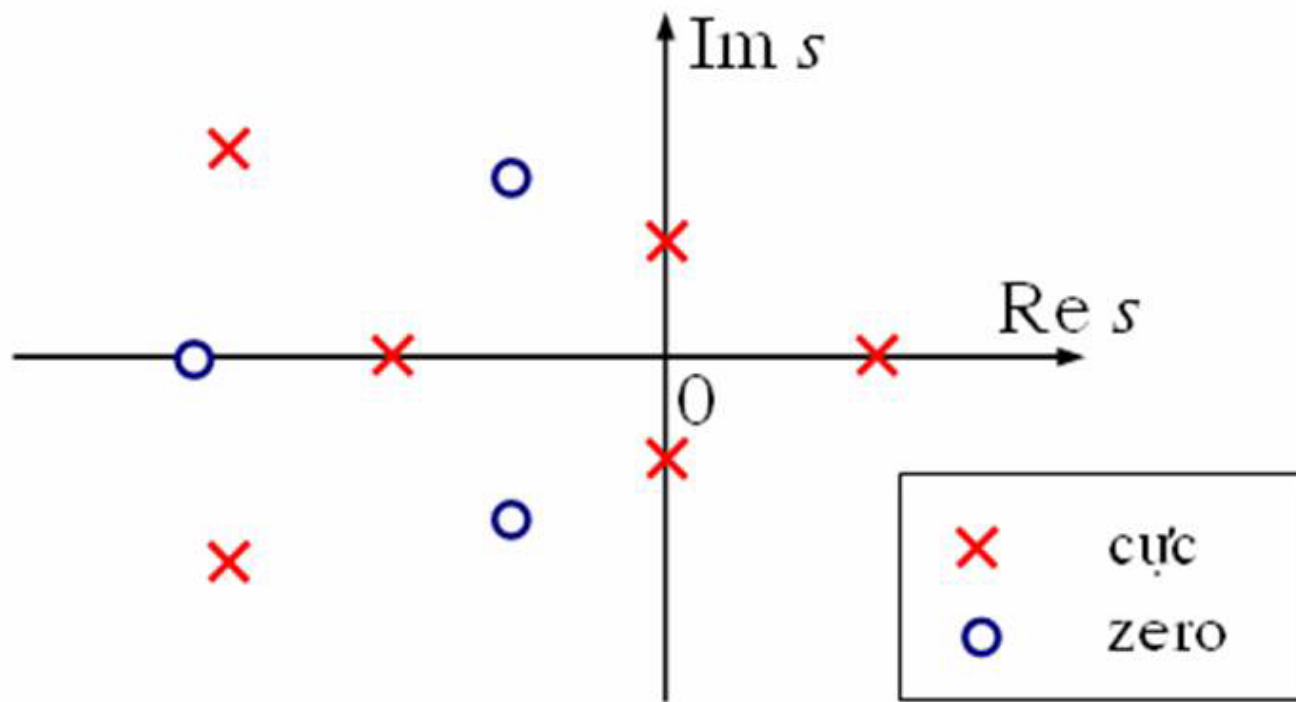
$B(s) = b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m$ tử số hàm truyền

★ **Cực: (Pole)** là nghiệm của **mẫu số** hàm truyền, tức là nghiệm của phương trình $A(s) = 0$. Do $A(s)$ bậc n nên hệ thống có n cực ký hiệu là p_i , $i = 1, 2, \dots, m$.

★ **Zero:** là nghiệm của **tử số** hàm truyền, tức là nghiệm của phương trình $B(s) = 0$. Do $B(s)$ bậc m nên hệ thống có m zero ký hiệu là z_i , $i = 1, 2, \dots, m$.

Giản đồ cực - zero

- ★ Giản đồ cực – zero là đồ thị biểu diễn vị trí các cực và các zero của hệ thống trong mặt phẳng phức.



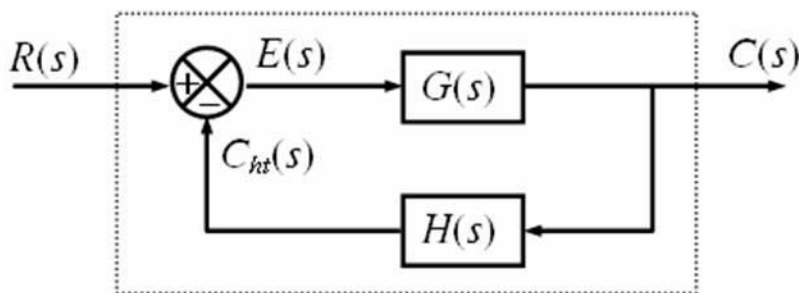
Điều kiện ổn định

- ★ Tính ổn định của hệ thống phụ thuộc vào vị trí các cực.
- ★ Hệ thống có tất cả các cực có phần thực âm (có tất cả các cực đều nằm bên trái mặt phẳng phức): hệ thống ổn định.
- ★ Hệ thống có cực có phần thực bằng 0 (nằm trên trục ảo), các cực còn lại có phần thực bằng âm: hệ thống ở biên giới ổn định.
- ★ Hệ thống có ít nhất một cực có phần thực dương (có ít nhất một cực nằm bên phải mặt phẳng phức): hệ thống không ổn định.

Phương trình đặc trưng (PTĐT)

- ★ Phương trình đặc trưng: phương trình $A(s) = 0$
- ★ Đa thức đặc trưng: đa thức $A(s)$

Hệ thống hồi tiếp



Phương trình đặc trưng

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

Hệ thống mô tả bằng PTTT

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}r(t) \\ c(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

Phương trình đặc trưng

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$$

Tiêu chuẩn ổn định đại số

Điều kiện cần

★ Điều kiện cần để hệ thống ổn định là tất cả các hệ số của phương trình đặc trưng phải khác 0 và cùng dấu.

★ Thí dụ: Hệ thống có phương trình đặc trưng:

♣ $s^3 + 3s^2 - 2s + 1 = 0$

Không ổn định

♣ $s^4 + 2s^2 + 5s + 3 = 0$

Không ổn định

♣ $s^4 + 4s^3 + 5s^2 + 2s + 1 = 0$

Chưa kết luận được

Qui tắc thành lập bảng Routh

- ★ Cho hệ thống có phương trình đặc trưng:

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

- ★ Muốn xét tính ổn định của hệ thống theo tiêu chuẩn Routh, trước tiên ta thành lập **bảng Routh** theo qui tắc:

- ▲ Bảng Routh có $n+1$ hàng.
- ▲ Hàng 1 của bảng Routh gồm các hệ số có chỉ số chẵn.
- ▲ Hàng 2 của bảng Routh gồm các hệ số có chỉ số lẻ.
- ▲ Phần tử ở hàng i cột j của bảng Routh ($i \geq 3$) được tính theo công thức:

$$c_{ij} = c_{i-2,j+1} - \alpha_i \cdot c_{i-1,j+1}$$

với

$$\alpha_i = \frac{c_{i-2,1}}{c_{i-1,1}}$$

Dạng bảng Routh

	s^n	$c_{11} = a_0$	$c_{12} = a_2$	$c_{13} = a_4$	$c_{14} = a_6$	...
	s^{n-1}	$c_{21} = a_1$	$c_{22} = a_3$	$c_{23} = a_5$	$c_{24} = a_7$	...
$\alpha_3 = \frac{c_{11}}{c_{21}}$	s^{n-2}	$c_{31} = c_{12} - \alpha_3 c_{22}$	$c_{32} = c_{13} - \alpha_3 c_{23}$	$c_{33} = c_{14} - \alpha_3 c_{24}$	$c_{34} = c_{15} - \alpha_3 c_{25}$	...
$\alpha_4 = \frac{c_{21}}{c_{31}}$	s^{n-3}	$c_{41} = c_{22} - \alpha_4 c_{32}$	$c_{42} = c_{23} - \alpha_4 c_{33}$	$c_{43} = c_{24} - \alpha_4 c_{34}$	$c_{44} = c_{25} - \alpha_4 c_{35}$	...
...	...	...	...	...	...	...
$\alpha_n = \frac{c_{n-2,1}}{c_{n-1,1}}$	s^0	$c_{n1} = c_{n-2,2} - \alpha_n c_{n-1,2}$				

Phát biểu tiêu chuẩn

- ★ Điều kiện cần và đủ để hệ thống ổn định là tất cả các phần tử nằm ở cột 1 của bảng Routh đều dương. Số lần đổi dấu của các phần tử ở cột 1 của bảng Routh bằng số nghiệm của phương trình đặc trưng nằm bên phải mặt phẳng phức.

Thí dụ 1

★ Xét tính ổn định của hệ thống có phương trình đặc trưng là:

$$s^4 + 4s^3 + 5s^2 + 2s + 1 = 0$$

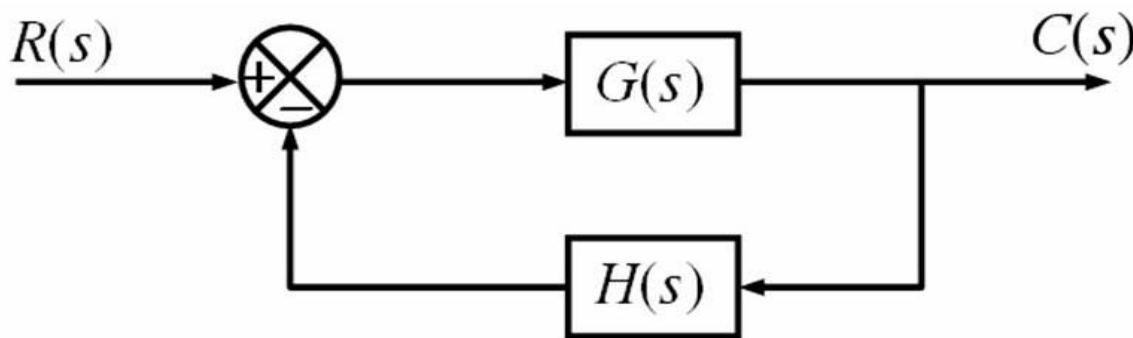
★ **Giải:** Bảng Routh

	s^4	1	5	1
	s^3	4	2	0
$\alpha_3 = \frac{1}{4}$	s^2	$5 - \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{9}{2}$	1	
$\alpha_4 = \frac{8}{9}$	s^1	$2 - \frac{8}{9} \cdot 1 = \frac{10}{9}$	0	
$\alpha_5 = \frac{81}{20}$	s^0	1		

★ Kết luận: Hệ thống ổn định do tất cả các phần tử ở cột 1 bảng Routh đều dương.

Thí dụ 2

★ Xét tính ổn định của hệ thống có sơ đồ khối:



$$G(s) = \frac{50}{s(s+3)(s^2 + s + 5)}$$

$$H(s) = \frac{1}{s+2}$$

★ **Giải:** Phương trình đặc trưng của hệ thống là:

$$1 + G(s).H(s) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{50}{s(s+3)(s^2 + s + 5)} \cdot \frac{1}{(s+2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow s(s+3)(s^2 + s + 5)(s+2) + 50 = 0$$

$$\Leftrightarrow s^5 + 6s^4 + 16s^3 + 31s^2 + 30s + 50 = 0$$

Thí dụ 2 (tt)

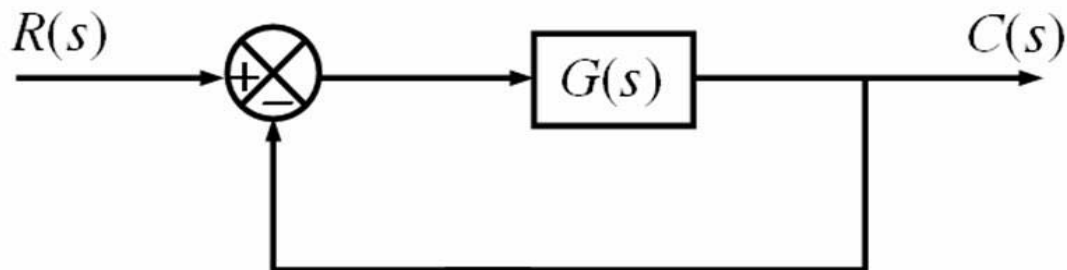
★ Bảng Routh

	s^5	1	16	30
	s^4	6	31	50
$\alpha_3 = \frac{1}{6}$	s^3	$16 - \frac{1}{6} \cdot 31 = 10.83$	$30 - \frac{1}{6} \cdot 50 = 21.67$	0
$\alpha_4 = \frac{6}{10.83}$	s^2	$31 - \frac{6}{10.83} \times 21.67 = 18.99$	50	
$\alpha_5 = \frac{10.83}{18.99}$	s^1	$21.67 - \frac{10.83}{18.99} \times 50 = -6.84$	0	
	s^0	50		

★ Kết luận: Hệ thống không ổn định do tất cả các phần tử ở cột 1 bảng Routh đổi dấu 2 lần.

Thí dụ 3

★ Tìm điều kiện của K để hệ thống ổn định:



$$G(s) = \frac{K}{s(s^2 + s + 1)(s + 2)}$$

★ **Giải:** Phương trình đặc trưng của hệ thống là:

$$1 + G(s) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{K}{s(s^2 + s + 1)(s + 2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

Thí dụ 3 (tt)

★ Bảng Routh

	s^4	1	3	K
	s^3	3	2	0
$\alpha_3 = \frac{1}{3}$	s^2	$3 - \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{7}{3}$	K	
$\alpha_4 = \frac{9}{7}$	s^1	$2 - \frac{9}{7} \cdot K$	0	
	s^0	K		

★ Điều kiện để hệ thống ổn định:

$$\begin{cases} 2 - \frac{9}{7}K > 0 \\ K > 0 \end{cases}$$

 $\Leftrightarrow$

$$0 < K < \frac{14}{9}$$



Trường hợp đặc biệt 1

- ★ Nếu bảng Routh có hệ số ở cột 1 của hàng nào đó bằng 0, các hệ số còn lại của hàng đó khác 0 thì ta *thay hệ số bằng 0 ở cột 1 bởi số ε dương nhỏ tùy ý*, sau đó quá trình tính toán được tiếp tục.

Thí dụ 4

★ Xét tính ổn định của hệ thống có phương trình đặc trưng là:

$$s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 8s + 3 = 0$$

★ Giải:

Bảng Routh

	s^4	1	4	3
	s^3	2	8	0
$\alpha_3 = \frac{1}{2}$	s^2	$4 - \frac{1}{2} \cdot 8 = 0$	3	
$\Rightarrow$	s^2	$\varepsilon > 0$	3	
$\alpha_4 = \frac{2}{\varepsilon}$	s^1	$8 - \frac{2}{\varepsilon} \cdot 3 < 0$	0	
	s^0	3		

★ Kết luận: Vì các hệ số ở cột 1 bảng Routh đổi dấu 2 lần nên phương trình đặc trưng của hệ thống có hai nghiệm nằm bên phải mặt phẳng phức, do đó **hệ thống không ổn định**.

Trường hợp đặc biệt 2

- ★ Nếu bảng Routh có tất cả các hệ số của hàng nào đó bằng 0:
 - ▲ Thành lập đa thức phụ từ các hệ số của hàng trước hàng có tất cả các hệ số bằng 0, gọi đa thức đó là $A_0(s)$.
 - ▲ Thay hàng có tất cả các hệ số bằng 0 bởi một hàng khác có các hệ số chính là các hệ số của đa thức $dA_0(s)/ds$, sau đó quá trình tính toán tiếp tục.
- ★ Chú ý: Nghiệm của đa thức phụ $A_0(s)$ cũng chính là nghiệm của phương trình đặc trưng.

Thí dụ 5

★ Xét tính ổn định của hệ thống có phương trình đặc trưng là:

$$s^5 + 4s^4 + 8s^3 + 8s^2 + 7s + 4 = 0$$

★ Giải: Bảng Routh

	s^5	1	8	7
	s^4	4	8	4
$\alpha_3 = \frac{1}{4}$	s^3	$8 - \frac{1}{4} \times 8 = 6$	$7 - \frac{1}{4} \times 4 = 6$	0
$\alpha_4 = \frac{4}{6}$	s^2	$8 - \frac{4}{6} \times 6 = 4$	4	
$\alpha_5 = \frac{6}{4}$	s^1	$6 - \frac{6}{4} \times 4 = 0$	0	
$\Rightarrow$	s^1	8	0	
$\alpha_6 = \frac{4}{8}$	s^0	$4 - \frac{4}{8} \times 0 = 4$		

Thí dụ 5 (tt)

★ Đa thức phụ:

$$A_0(s) = 4s^2 + 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{dA_0(s)}{ds} = 8s + 0$$

★ Nghiệm của đa thức phụ (cũng chính là nghiệm của phương trình đặc trưng):

$$A_0(s) = 4s^2 + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad s = \pm j$$

★ Kết luận:

- ▲ Các hệ số cột 1 bảng Routh không đổi dấu nên phương trình đặc trưng không có nghiệm nằm bên phải mặt phẳng phức.
- ▲ Phương trình đặc tính có 2 nghiệm nằm trên trục ảo.
- ▲ Số nghiệm nằm bên trái mặt phẳng phức là $5 - 2 = 3$.

Hệ thống ở biên giới ổn định

Qui tắc thành lập ma trận Hurwitz

★ Cho hệ thống có phương trình đặc trưng:

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

★ Muốn xét tính ổn định của hệ thống theo tiêu chuẩn Hurwitz, trước tiên ta thành lập ma trận Hurwitz theo qui tắc:

♣ Ma trận Hurwitz là ma trận vuông cấp $n \times n$.

♣ **Đường chéo** của ma trận Hurwitz là **các hệ số từ a_1 đến a_n** .

♣ **Hàng lẻ** của ma trận Hurwitz gồm **các hệ số có chỉ số lẻ** theo thứ tự tăng dần nếu ở bên phải đường chéo và giảm dần nếu ở bên trái đường chéo.

♣ **Hàng chẵn** của ma trận Hurwitz gồm **các hệ số có chỉ số chẵn** theo thứ tự tăng dần nếu ở bên phải đường chéo và giảm dần nếu ở bên trái đường chéo.

Dạng ma trận Hurwitz

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

Phát biểu tiêu chuẩn

★ Điều kiện *cần và đủ* để hệ thống ổn định là *tất cả các định thức con chứa đường chéo* của ma trận Hurwitz *đều dương*

Thí dụ 1

★ Xét tính ổn định của hệ thống có phương trình đặc trưng là:

$$s^3 + 4s^2 + 3s + 2 = 0$$

★ Giải:

Ma trận Hurwitz

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Các định thức: $\Delta_1 = a_1 = 1$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \times 3 - 1 \times 2 = 10$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 10 = 20$$

★ Kết luận: **Hệ thống ổn định** do các định thức đều dương

Các hệ quả của tiêu chuẩn Hurwitz

★ **Hệ bậc 2** ổn định nếu phương trình đặc trưng thỏa mãn điều kiện:

$$a_i > 0, \quad i = \overline{0,2}$$

★ **Hệ bậc 3** ổn định nếu phương trình đặc trưng thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases} a_i > 0, & i = \overline{0,3} \\ a_1a_2 - a_0a_3 > 0 \end{cases}$$

★ **Hệ bậc 4** ổn định nếu phương trình đặc trưng thỏa mãn điều kiện:

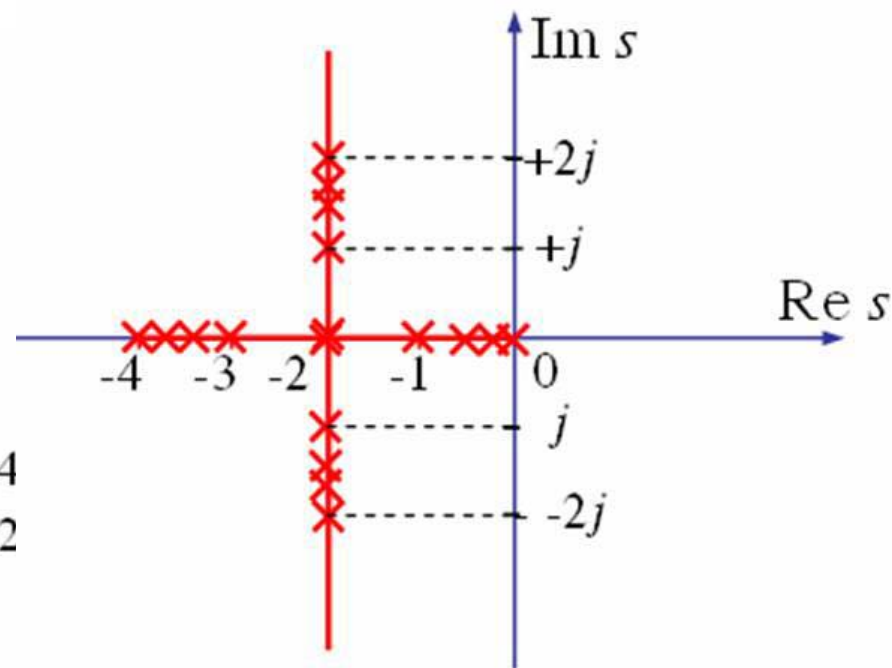
$$\begin{cases} a_i > 0, & i = \overline{0,4} \\ a_1a_2 - a_0a_3 > 0 \\ a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4 > 0 \end{cases}$$

Phương pháp quỹ đạo nghiệm số

Định nghĩa

- Quỹ đạo nghiệm số là tập hợp tất cả các nghiệm của phương trình đặc trưng của hệ thống khi có một thông số nào đó trong hệ thay đổi từ $0 \rightarrow \infty$.
- Thí dụ: QĐNS của hệ thống có PTĐT $s^2 + 4s + K = 0$ có dạng như hình vẽ dưới đây:

$K = 0:$	$s_1 = 0,$	$s_2 = -4$
$K = 1:$	$s_1 = -0.268,$	$s_2 = -3.732$
$K = 2:$	$s_1 = -0.586,$	$s_2 = -3.414$
$K = 3:$	$s_1 = -1,$	$s_2 = -3$
$K = 4:$	$s_1 = -2,$	$s_2 = -2$
$K = 5:$	$s_1 = -2 + j,$	$s_2 = -2 - j$
$K = 6:$	$s_1 = -2 + j1.414,$	$s_2 = -2 - j1.414$
$K = 7:$	$s_1 = -2 + j1.732,$	$s_2 = -2 - j1.732$
$K = 8:$	$s_1 = -2 + j2,$	$s_2 = -2 - j2$



Qui tắc vẽ QĐNS

★ Muốn áp dụng các qui tắc vẽ quỹ đạo nghiệm số, trước tiên ta phải biến đổi tương đương phương trình đặc trưng về dạng:

$$1 + K \frac{N(s)}{D(s)} = 0 \quad (1)$$

Đặt:
$$G_0(s) = K \frac{N(s)}{D(s)}$$

Gọi n là số cực của $G_0(s)$, m là số zero của $G_0(s)$

$$(1) \Leftrightarrow 1 + G_0(s) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |G_0(s)| = 1 & \text{Điều kiện biên độ} \\ \angle G_0(s) = (2l + 1)\pi & \text{Điều kiện pha} \end{cases}$$

Quy tắc vẽ QĐNS

- ★ **Quy tắc 1:** Số nhánh của quỹ đạo nghiệm số = bậc của phương trình đặc tính = số cực của $G_0(s) = n$.
- ★ **Quy tắc 2:**
 - ♣ Khi $K = 0$: các nhánh của quỹ đạo nghiệm số xuất phát từ các cực của $G_0(s)$.
 - ♣ Khi K tiến đến $+\infty$: m nhánh của quỹ đạo nghiệm số tiến đến m zero của $G_0(s)$, $n-m$ nhánh còn lại tiến đến ∞ theo các tiệm cận xác định bởi **qui tắc 5** và **qui tắc 6**.
- ★ **Quy tắc 3:** Quỹ đạo nghiệm số đối xứng qua trục thực.
- ★ **Quy tắc 4:** Một điểm trên trục thực thuộc về quỹ đạo nghiệm số nếu tổng số cực và zero của $G_0(s)$ bên phải nó là một số lẻ.

Quy tắc vẽ QĐNS (tt)

- ★ **Quy tắc 5:** : Góc tạo bởi các đường tiệm cận của quỹ đạo nghiệm số với trục thực xác định bởi :

$$\alpha = \frac{(2l + 1)\pi}{n - m} \quad (l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

- ★ **Quy tắc 6:** : Giao điểm giữa các tiệm cận với trục thực là điểm A có tọa độ xác định bởi:

$$OA = \frac{\sum \text{cực} - \sum \text{zero}}{n - m} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m} \quad (p_i \text{ và } z_i \text{ là các cực và các zero của } G_0(s))$$

- ★ **Quy tắc 7:** : Điểm tách nhập (nếu có) của quỹ đạo nghiệm số nằm trên trục thực và là nghiệm của phương trình:

$$\frac{dK}{ds} = 0$$

Qui tắc vẽ QĐNS (tt)

- ★ **Qui tắc 8:** : Giao điểm của quỹ đạo nghiệm số với trục ảo có thể xác định bằng cách áp dụng tiêu chuẩn Routh–Hurwitz hoặc thay $s=j\omega$ vào phương trình đặc trưng.
- ★ **Qui tắc 9:** Góc xuất phát của quỹ đạo nghiệm số tại cực phức p_j được xác định bởi:

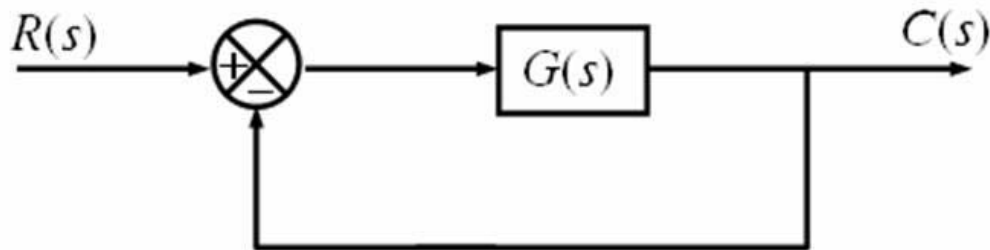
$$\theta_j = 180^0 + \sum_{i=1}^m \arg(p_j - z_i) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \arg(p_j - p_i)$$

Dạng hình học của công thức trên là:

$$\theta_j = 180^0 + (\sum \text{góc từ các zero đến cực } p_j) \\ - (\sum \text{góc từ các cực còn lại đến cực } p_j)$$

Thí dụ 1

★ Vẽ QĐNS của hệ thống sau đây khi $K=0 \rightarrow +\infty$.



$$G(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+3)}$$

★ Giải:

★ Phương trình đặc trưng của hệ thống:

$$1 + G(s) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \frac{K}{s(s+2)(s+3)} = 0 \quad (1)$$

★ Các cực: $p_1 = 0$ $p_2 = -2$ $p_3 = -3$

★ Các zero: không có

Thí dụ 1 (tt)

★ Tiệm cận:

$$\alpha = \frac{(2l+1)\pi}{n-m} = \frac{(2l+1)\pi}{3-0} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{\pi}{3} & (l=0) \\ \alpha_2 = -\frac{\pi}{3} & (l=-1) \\ \alpha_3 = \pi & (l=1) \end{cases}$$

$$OA = \frac{\sum \text{cực} - \sum \text{zero}}{n-m} = \frac{[0 + (-2) + (-3)] - 0}{3-0} = -\frac{5}{3}$$

★ Điểm tách nhập:

$$(1) \Leftrightarrow K = -s(s+2)(s+3) = -(s^3 + 5s^2 + 6s)$$

$$\Rightarrow \frac{dK}{ds} = -(3s^2 + 10s + 6)$$

Do đó $\frac{dK}{ds} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} s_1 = -2.549 & (\text{loại}) \\ s_2 = -0.785 \end{cases}$

Thí dụ 1 (tt)

★ Giao điểm của QĐNS với trục ảo:

Cách 1: Dùng tiêu chuẩn Hurwitz

$$(1) \Leftrightarrow s^3 + 5s^2 + 6s + K = 0 \quad (2)$$

Điều kiện ổn định:

$$\begin{cases} K > 0 \\ a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K > 0 \\ 5 \times 6 - 1 \times K > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < K < 30 \Rightarrow K_{gh} = 30$$

Thay giá trị $K_{gh} = 30$ vào phương trình (2), giải phương trình ta được giao điểm của QĐNS với trục ảo

$$s^3 + 5s^2 + 6s + 30 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} s_1 = -5 \\ s_2 = j\sqrt{6} \\ s_3 = -j\sqrt{6} \end{cases}$$

Thí dụ 1 (tt)

★ Giao điểm của QĐNS với trục ảo:

Cách 2:

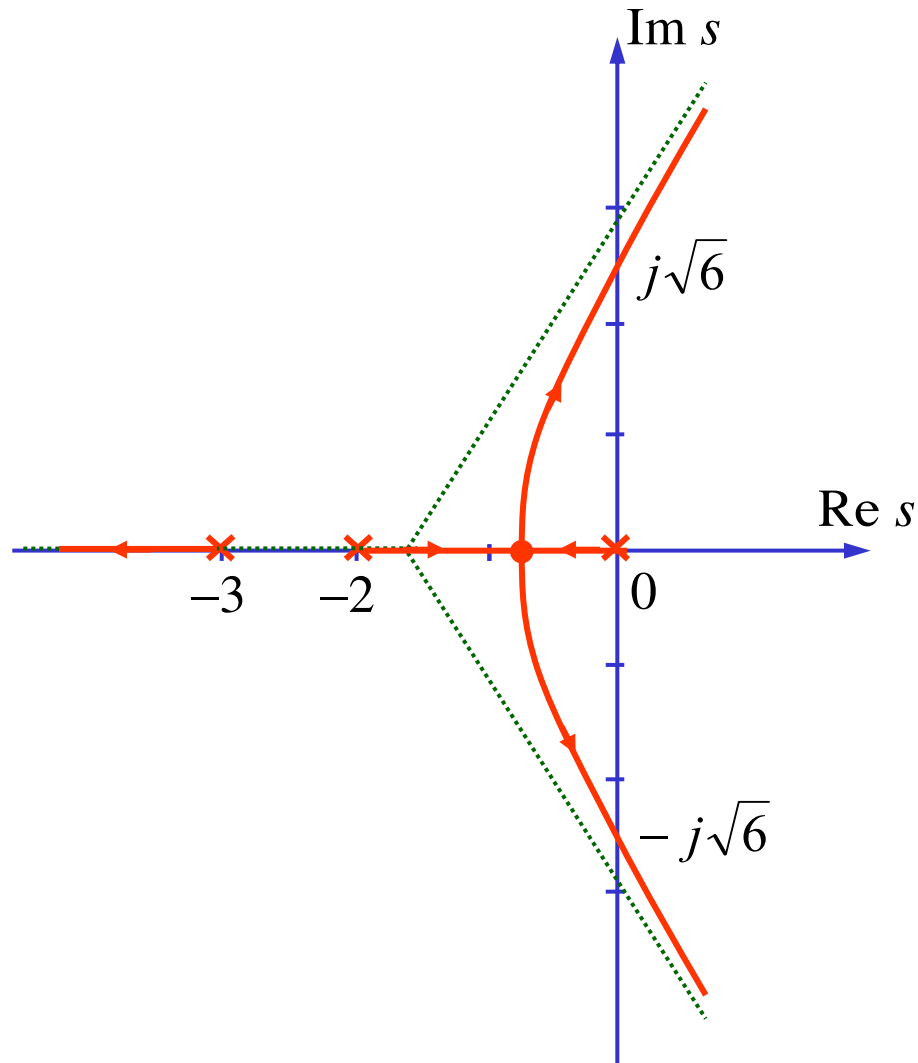
$$(1) \Leftrightarrow s^3 + 5s^2 + 6s + K = 0 \quad (2)$$

Thay $s=j\omega$ vào phương trình (2):

$$(j\omega)^3 + 5(j\omega)^2 + 6(j\omega) + K = 0 \Leftrightarrow -j\omega^3 - 5\omega^2 + 6j\omega + K = 0$$

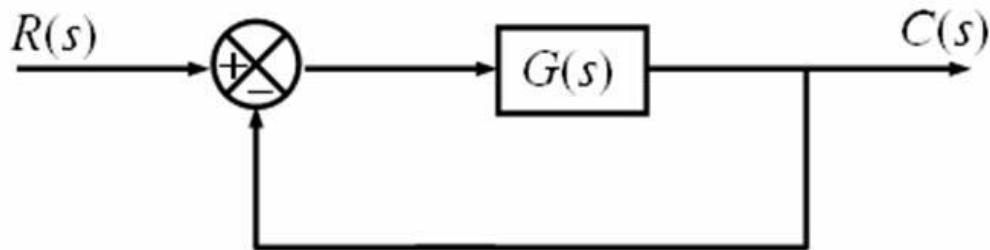
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -j\omega^3 + 6j\omega = 0 \\ -5\omega^2 + K = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega = 0 \\ K = 0 \\ \omega = \pm\sqrt{6} \\ K = 30 \end{cases}$$

Thí dụ 1 (tt)



Thí dụ 2

★ Vẽ QĐNS của hệ thống sau đây khi $K=0 \rightarrow +\infty$.



$$G(s) = \frac{K}{s(s^2 + 8s + 20)}$$

★ Giải:

★ Phương trình đặc trưng của hệ thống:

$$1 + G(s) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \frac{K}{s(s^2 + 8s + 20)} = 0 \quad (1)$$

★ Các cực: $p_1 = 0$ $p_{2,3} = -4 \pm j2$

★ Các zero: không có

Thí dụ 2 (tt)

★ Tiệm cận:

$$\alpha = \frac{(2l+1)\pi}{n-m} = \frac{(2l+1)\pi}{3-0} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{\pi}{3} & (l=0) \\ \alpha_2 = -\frac{\pi}{3} & (l=-1) \\ \alpha_3 = \pi & (l=1) \end{cases}$$

$$OA = \frac{\sum \text{cực} - \sum \text{zero}}{n-m} = \frac{[0 + (-4 + j2) + (-4 - j2)] - (0)}{3-0} = -\frac{8}{3}$$

★ Điểm tách nhập:

$$(1) \Leftrightarrow K = -(s^3 + 8s^2 + 20s)$$

$$\Rightarrow \frac{dK}{ds} = -(3s^2 + 16s + 20)$$

$$\text{Do đó} \quad \frac{dK}{ds} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} s_1 = -3.33 \\ s_2 = -2.00 \end{cases} \quad (\text{hai điểm tách nhập})$$

Thí dụ 2 (tt)

★ Giao điểm của QĐNS với trục ảo:

$$(1) \Leftrightarrow s^3 + 8s^2 + 20s + K = 0 \quad (2)$$

Thay $s=j\omega$ vào phương trình (2):

$$(j\omega)^3 + 8(j\omega)^2 + 20(j\omega) + K = 0$$

$$\Leftrightarrow -j\omega^3 - 8\omega^2 + 20j\omega + K = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -8\omega^2 + K = 0 \\ -\omega^3 + 20\omega = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega = 0 \\ K = 0 \\ \omega = \pm\sqrt{20} \\ K = 160 \end{cases}$$

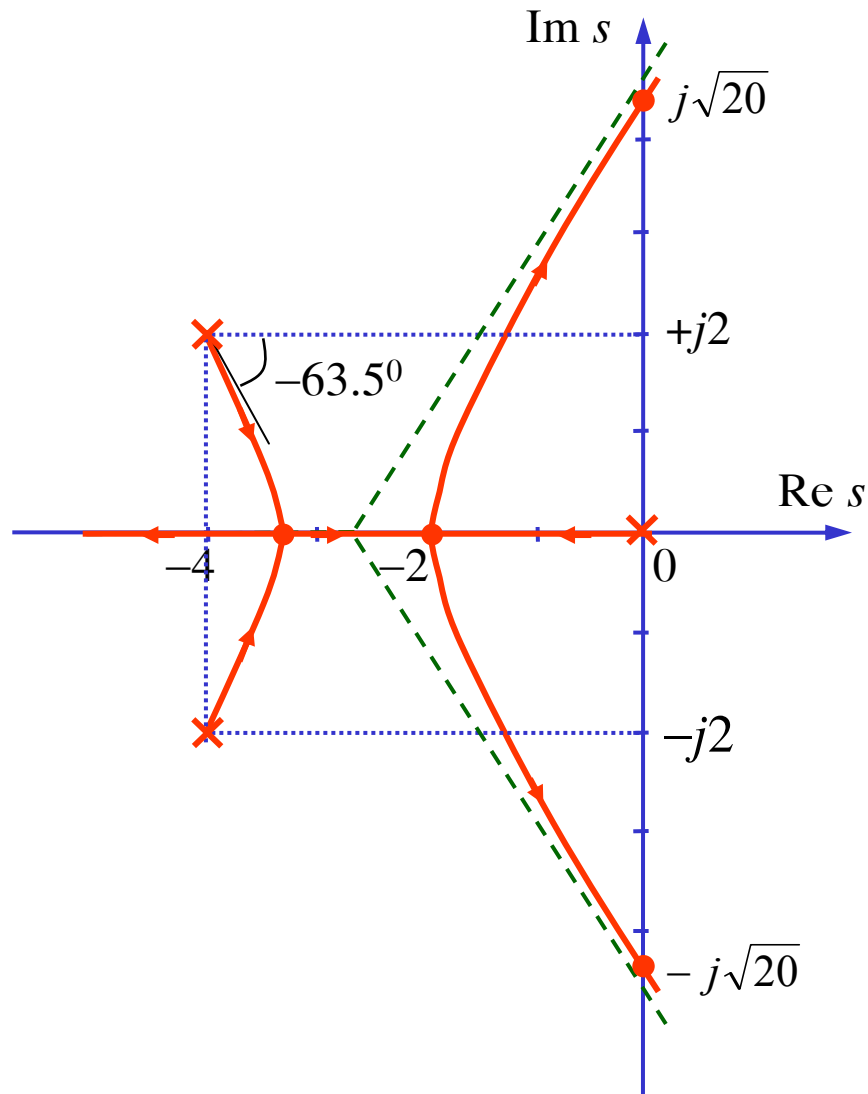
Thí dụ 2 (tt)

★ Góc xuất phát của QĐNS tại cực phức p_2 :

$$\begin{aligned}\theta_2 &= 180^0 - [\arg(p_2 - p_1) + \arg(p_2 - p_3)] \\ &= 180^0 - \{\arg[(-4 + j2) - 0] + \arg[(-4 + j2) - (-4 - j2)]\} \\ &= 180^0 - \left\{ \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{2}{-4}\right) + 90 \right\} \\ &= 180^0 - \{153.5 + 90\}\end{aligned}$$

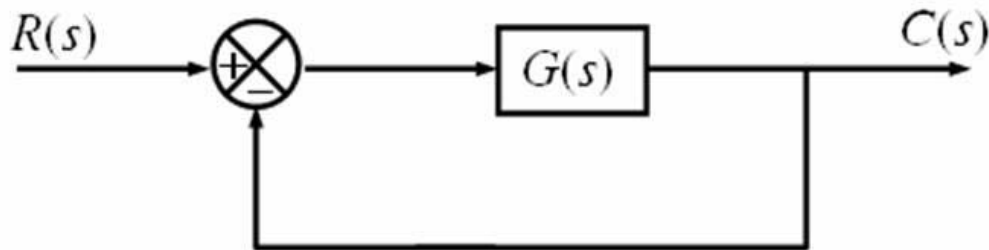
$$\theta_2 = -63.5^0$$

Thí dụ 2 (tt)



Thí dụ 3

★ Vẽ QĐNS của hệ thống sau đây khi $K=0 \rightarrow +\infty$.



$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+3)(s^2+8s+20)}$$

★ Giải:

★ Phương trình đặc trưng của hệ thống:

$$1 + G(s) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \frac{K(s+1)}{s(s+3)(s^2+8s+20)} = 0 \quad (1)$$

★ Các cực: $p_1 = 0$ $p_2 = -3$ $p_{3,4} = -4 \pm j2$

★ Các zero: $z_1 = -1$

Thí dụ 3 (tt)

★ Tiệm cận:

$$\alpha = \frac{(2l+1)\pi}{n-m} = \frac{(2l+1)\pi}{4-1} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{\pi}{3} & (l=0) \\ \alpha_2 = -\frac{\pi}{3} & (l=-1) \\ \alpha_3 = \pi & (l=1) \end{cases}$$

$$OA = \frac{\sum \text{cực} - \sum \text{zero}}{n-m} = \frac{[0 + (-3) + (-4 + j2) + (-4 - j2)] - (-1)}{4-1} = -\frac{10}{3}$$

★ Điểm tách nhập:

$$(1) \Leftrightarrow K = -\frac{s(s+3)(s^2+8s+20)}{(s+1)} \Rightarrow \frac{dK}{ds} = -\frac{3s^4 + 26s^3 + 77s^2 + 88s + 60}{(s+1)^2}$$

$$\text{Do đó } \frac{dK}{ds} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} s_{1,2} = -3,67 \pm j1,05 \\ s_{3,4} = -0,66 \pm j0,97 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(không có} \\ \text{điểm tách nhập)} \end{matrix}$$

Thí dụ 3 (tt)

★ Giao điểm của QĐNS với trục ảo:

$$(1) \Leftrightarrow s^4 + 11s^3 + 44s^2 + (60 + K)s + K = 0 \quad (2)$$

Thay $s=j\omega$ vào phương trình (2):

$$\omega^4 - 11j\omega^3 - 44\omega^2 + (60 + K)j\omega + K = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \omega^4 - 44\omega^2 + K = 0 \\ -11\omega^3 + (60 + K)\omega = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega = 0 \\ K = 0 \\ \omega = \pm 5,893 \\ K = 322 \\ \omega = \pm j1,314 \\ K = -61,7 \end{cases} \quad (\text{loại})$$

Vậy giao điểm cần tìm là: $s = \pm j5,893$ HSKĐ giới hạn là: $K_{gh} = 322$

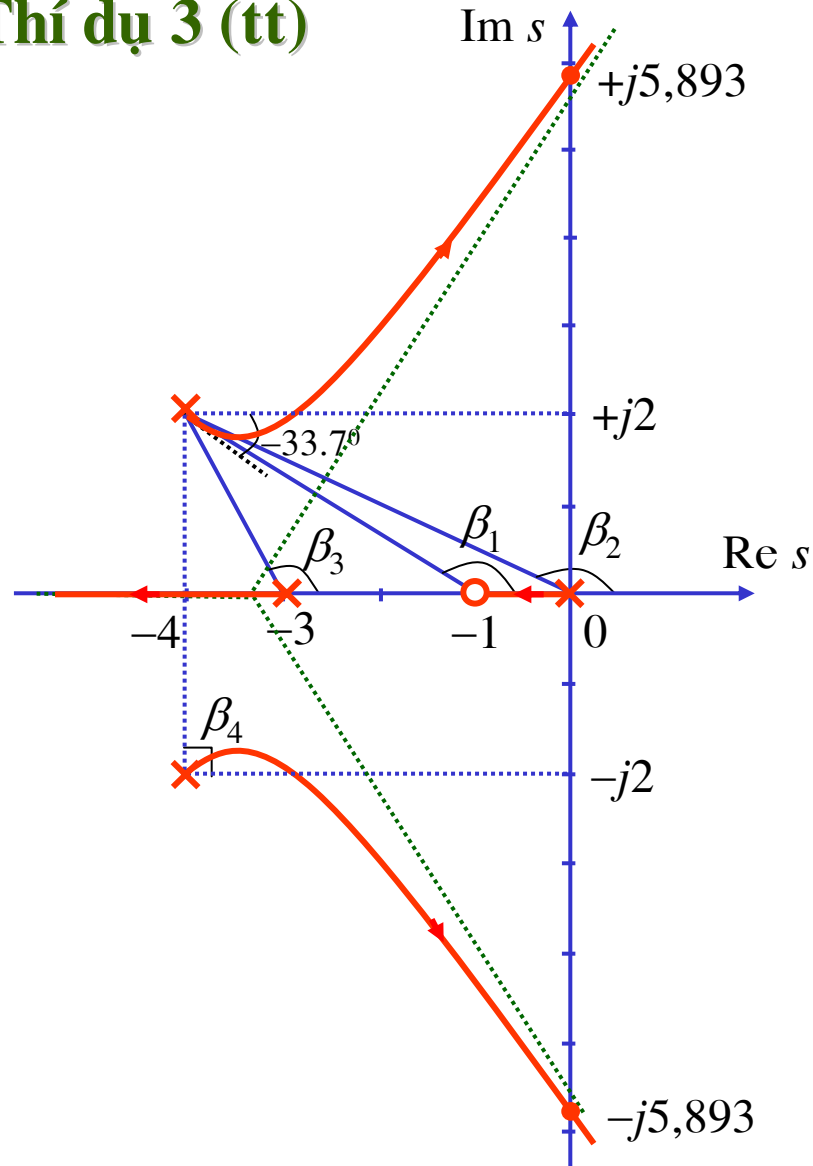
Thí dụ 3 (tt)

★ Góc xuất phát của QĐNS tại cực phức p_3 :

$$\begin{aligned}\theta_3 &= 180 + \beta_1 - (\beta_2 + \beta_3 + \beta_4) \\ &= 180 + 146,3 - (153,4 + 116,6 + 90)\end{aligned}$$

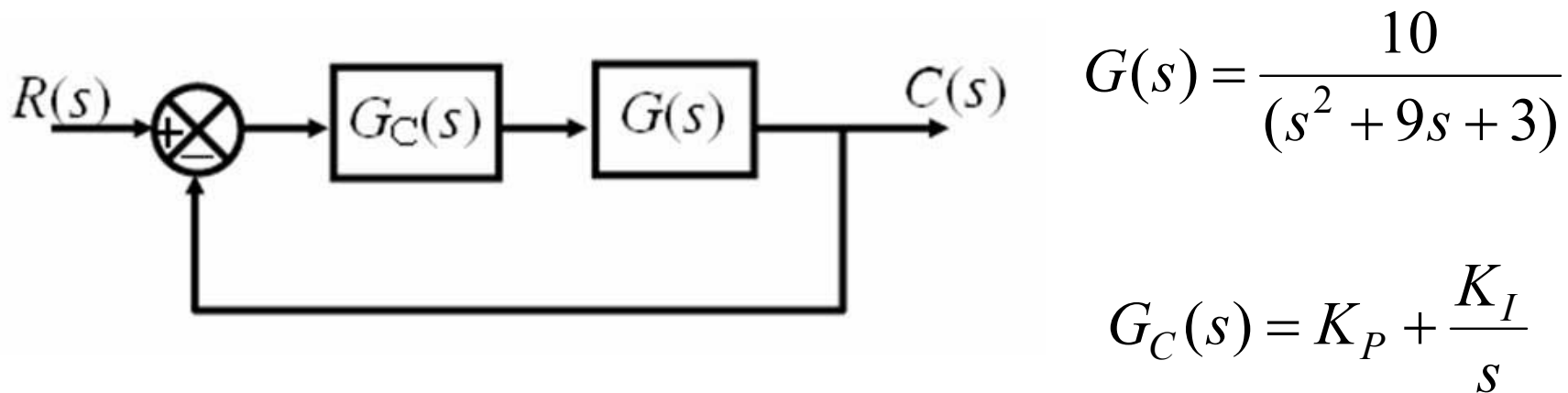
$$\theta_3 = -33.7^0$$

Thí dụ 3 (tt)



Thí dụ 4

★ Cho hệ thống điều khiển có sơ đồ khối như sau:



★ Cho $K_I = 2.7$, hãy vẽ QĐNS của hệ thống sau đây khi $K_P = 0 \rightarrow +\infty$, biết rằng $dK_P / ds = 0$ có 3 nghiệm là $-3, -3, 1.5$.

★ Khi $K_P = 270, K_I = 2.7$ hệ thống có ổn định hay không?

Thí dụ 4 (tt)

★ Giải:

★ Phương trình đặc trưng của hệ thống:

$$1 + G_C(s)G(s) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + \left(K_P + \frac{2.7}{s} \right) \left(\frac{10}{s^2 + 9s + 3} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{10K_P s}{(s + 9)(s^2 + 3)} = 0 \quad (1)$$

★ Các cực: $p_1 = -9$ $p_2 = +j\sqrt{3}$ $p_3 = -j\sqrt{3}$

★ Các zero: $z_1 = 0$

Thí dụ 4 (tt)

★ Tiệm cận:

$$\alpha = \frac{(2l+1)\pi}{n-m} = \frac{(2l+1)\pi}{3-1} \Rightarrow \begin{cases} \pi/2 & (l=0) \\ -\pi/2 & (l=-1) \end{cases}$$

$$OA = \frac{\sum \text{cực} - \sum \text{zero}}{n-m} = \frac{[-9 + (j\sqrt{3}) + (-j\sqrt{3})] - (0)}{3-1} = -\frac{9}{2}$$

★ Điểm tách nhập:

$$\frac{dK_P}{ds} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} s_1 = -3 \\ s_2 = -3 \\ s_3 = 1.5 \quad (\text{loại}) \end{cases}$$

QĐNS có hai điểm tách nhập trùng nhau tại -3

Thí dụ 2 (tt)

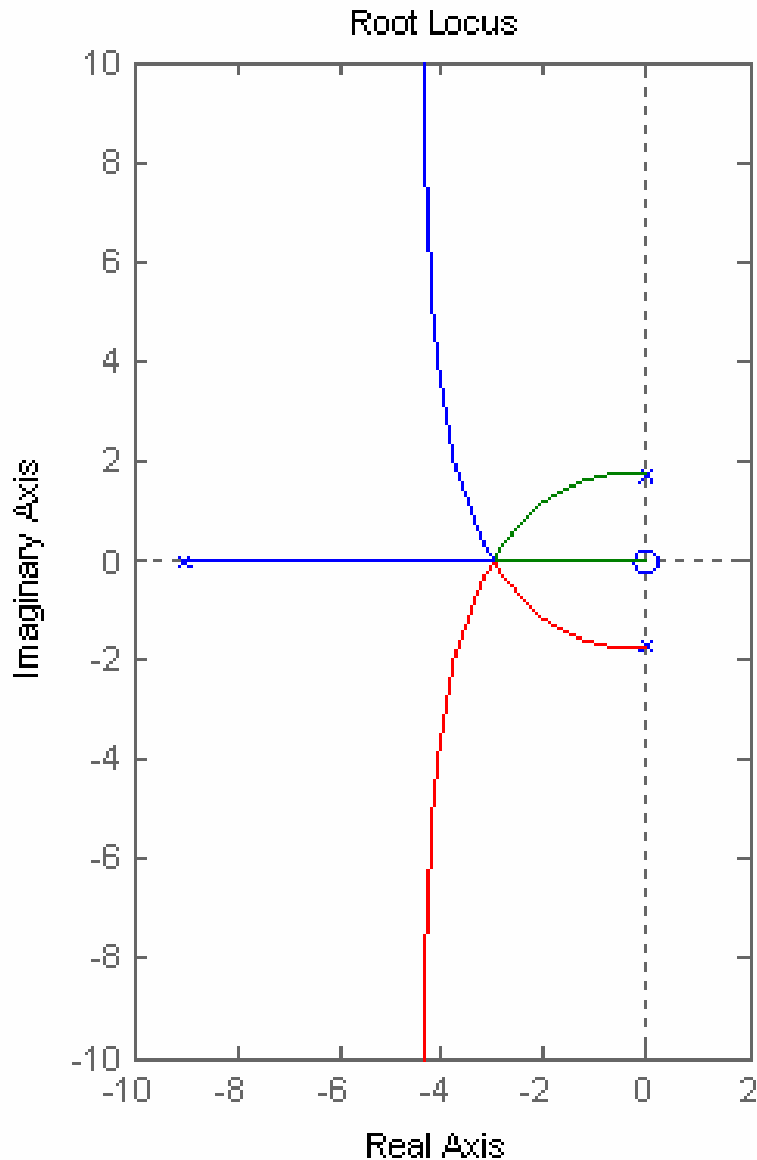
★ Góc xuất phát của QĐNS tại cực phức p_2 :

$$\begin{aligned}\theta_2 &= 180^0 + \arg(p_2 - z_1) - [\arg(p_2 - p_1) + \arg(p_2 - p_3)] \\ &= 180^0 + \arg(j\sqrt{3} - 0) - [\arg(j\sqrt{3} - (-9)) + \arg(j\sqrt{3} - (-j\sqrt{3}))] \\ &= 180^0 + 90 - \left\{ \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{-9}\right) + 90 \right\}\end{aligned}$$

$$\theta_2 = -169^0$$

Thí dụ 4 (tt)

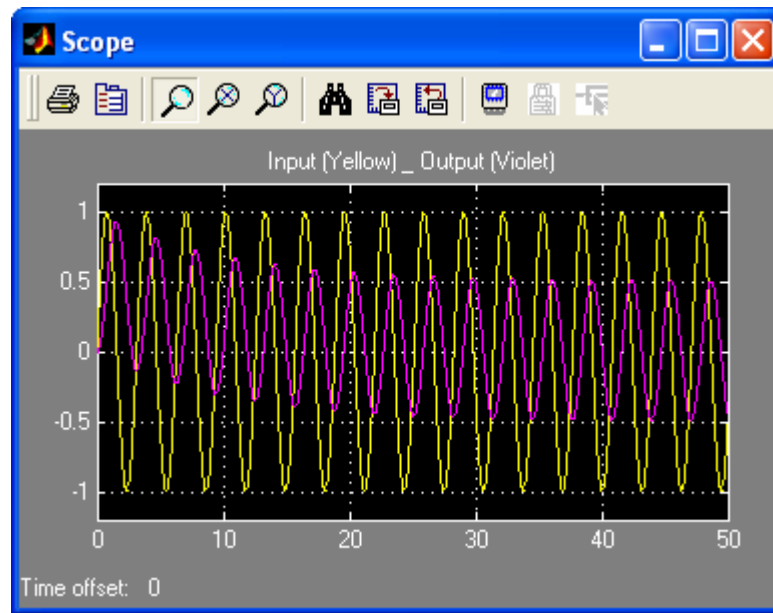
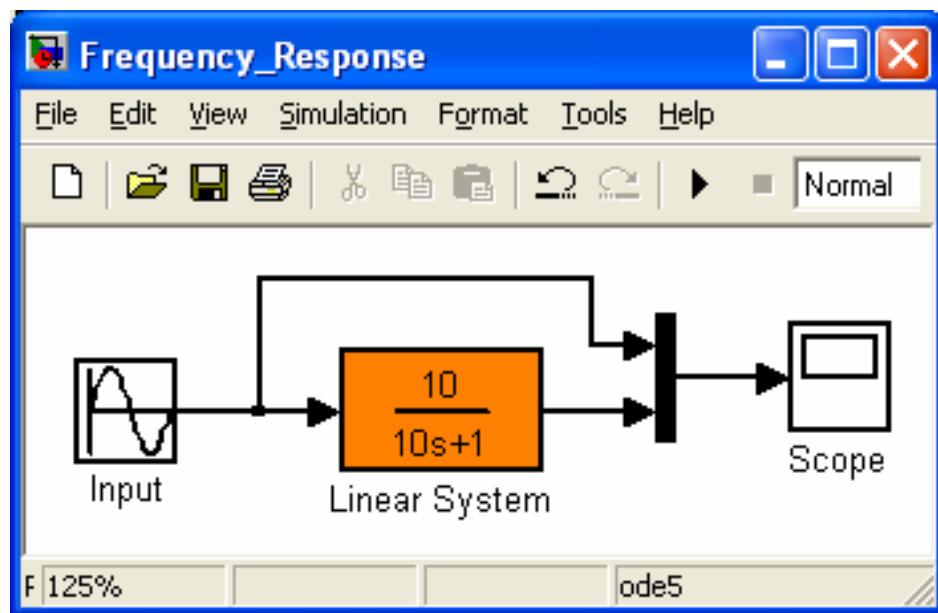
- ★ Khi $K_I = 2.7$, QĐNS của hệ thống nằm hoàn toàn bên trái mặt phẳng phức khi $K_P = 0 \rightarrow +\infty$, do đó hệ thống ổn định khi $K_I = 2.7$, $K_P = 270$.



Tiêu chuẩn ổn định tần số

Khái niệm đặc tính tần số

- ★ Hãy quan sát đáp ứng của hệ thống tuyến tính ở trạng thái xác lập khi tín hiệu vào là tín hiệu hình sin.



Khái niệm đặc tính tần số

- ★ Hệ thống tuyến tính: khi tín hiệu vào là tín hiệu hình sin thì ở trạng thái xác lập tín hiệu ra cũng là tín hiệu hình sin cùng tần số với tín hiệu vào, khác biên độ và pha.



- ★ Định nghĩa: Đặc tính tần số của hệ thống là tỉ số giữa tín hiệu ra ở trạng thái xác lập và tín hiệu vào hình sin.

$$\text{Đặc tính tần số} = \frac{C(j\omega)}{R(j\omega)}$$

Người ta chứng minh được:

$$\text{Đặc tính tần số} = G(s)|_{s=j\omega} = G(j\omega)$$

Đáp ứng biên độ – Đáp ứng pha

- ★ Tổng quát $G(j\omega)$ là một hàm phức nên có thể biểu diễn dưới dạng đại số hoặc dạng cực:

$$G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) = M(\omega).e^{j\varphi(\omega)}$$

Trong đó:

$$M(\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}$$

Đáp ứng biên độ

$$\varphi(\omega) = \angle G(j\omega) = \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \right]$$

Đáp ứng pha

- ★ Ý nghĩa vật lý:

- ▲ Đáp ứng biên độ cho biết tỉ lệ về biên độ (hệ số khuếch đại) giữa tín hiệu ra và tín hiệu vào theo tần số.
- ▲ Đáp ứng pha cho biết độ lệch pha giữa tín hiệu ra và tín hiệu vào theo tần số.

Biểu đồ Bode – Biểu đồ Nyquist

★ **Biểu đồ Bode**: là hình vẽ gồm 2 thành phần:

▲ ***Biểu đồ Bode về biên độ***: là đồ thị biểu diễn mối quan hệ giữa logarith của đáp ứng biên độ $L(\omega)$ theo tần số ω

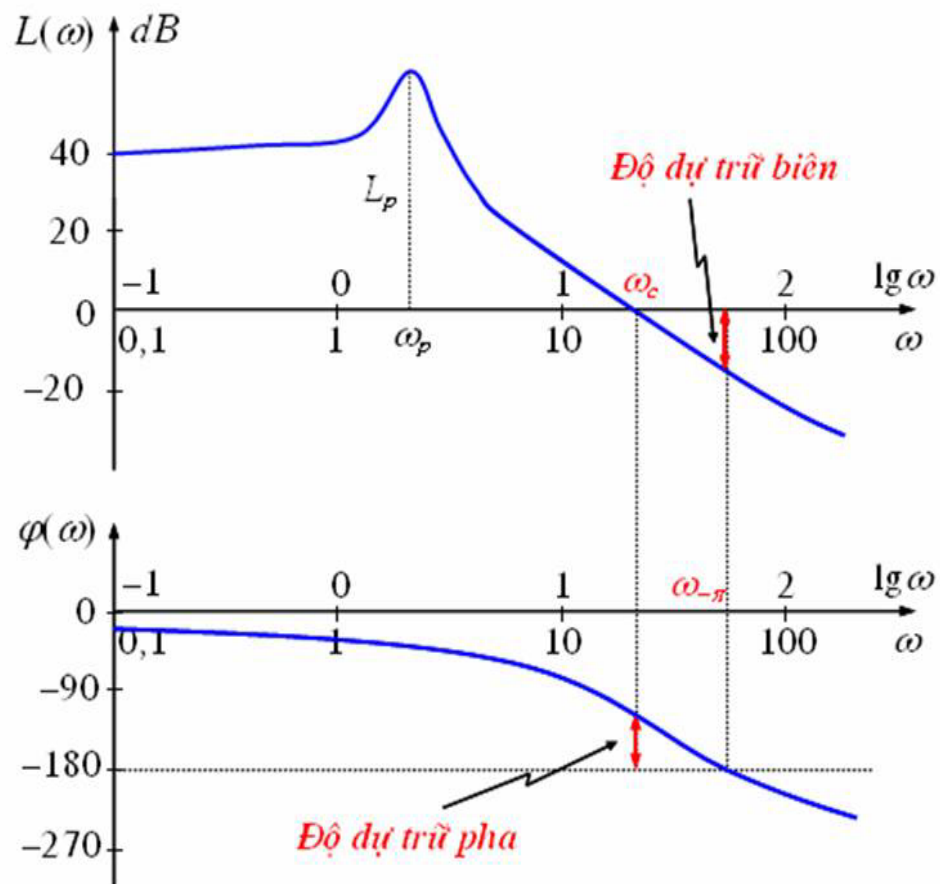
$$L(\omega) = 20 \lg M(\omega) \quad [\text{dB}]$$

▲ ***Biểu đồ Bode về pha***: là đồ thị biểu diễn mối quan hệ giữa đáp ứng pha $\varphi(\omega)$ theo tần số ω .

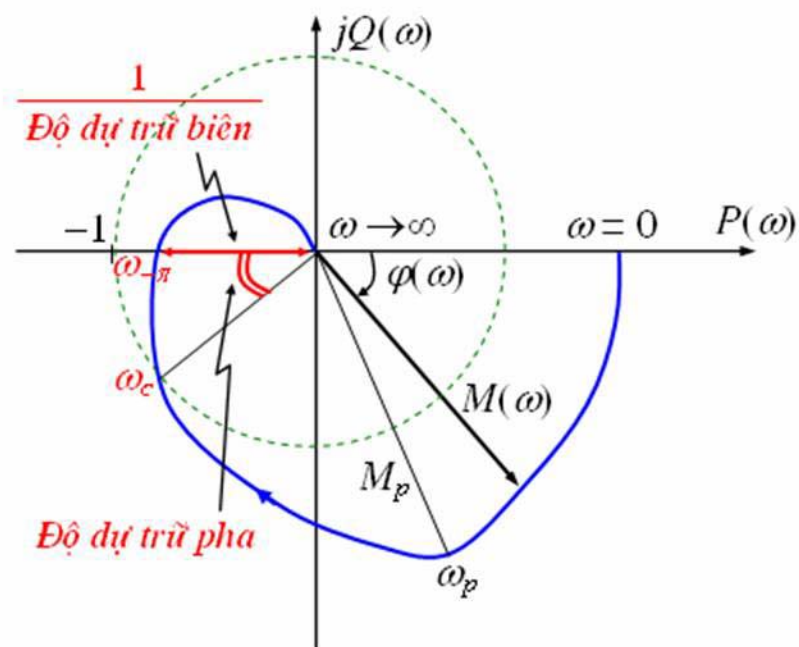
Cả hai đồ thị trên đều được vẽ trong hệ tọa độ vuông góc với trục hoành ω được chia theo thang logarith cơ số 10.

★ **Biểu đồ Nyquist**: (đường cong Nyquist) là đồ thị biểu diễn đặc tính tần số $G(j\omega)$ trong hệ tọa độ cực khi ω thay đổi từ $0 \rightarrow \infty$.

Biểu đồ Bode



Biểu đồ Nyquist



Đặc tính tần số của các khâu cơ bản: **Khâu tỉ lệ**

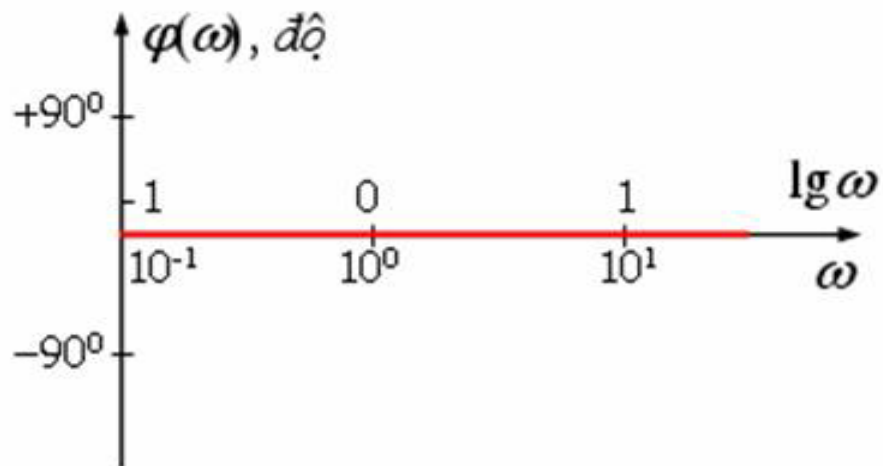
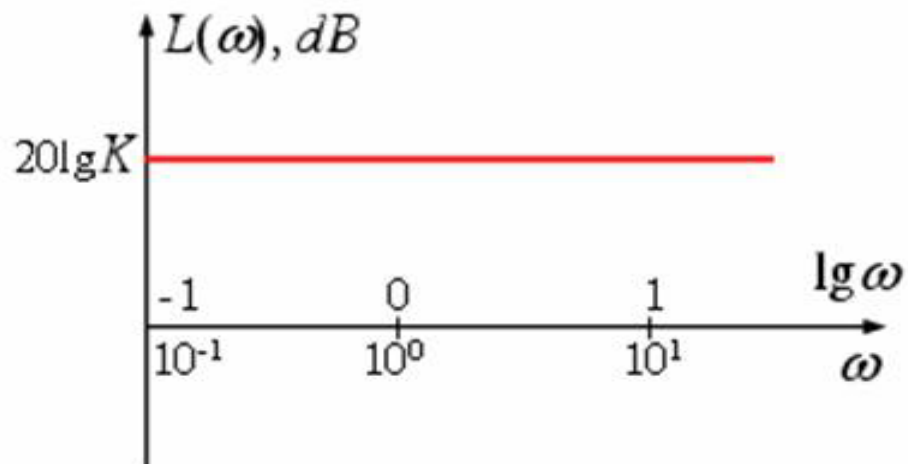
★ Hàm truyền: $G(s) = K$

★ Đặc tính tần số: $G(j\omega) = K$

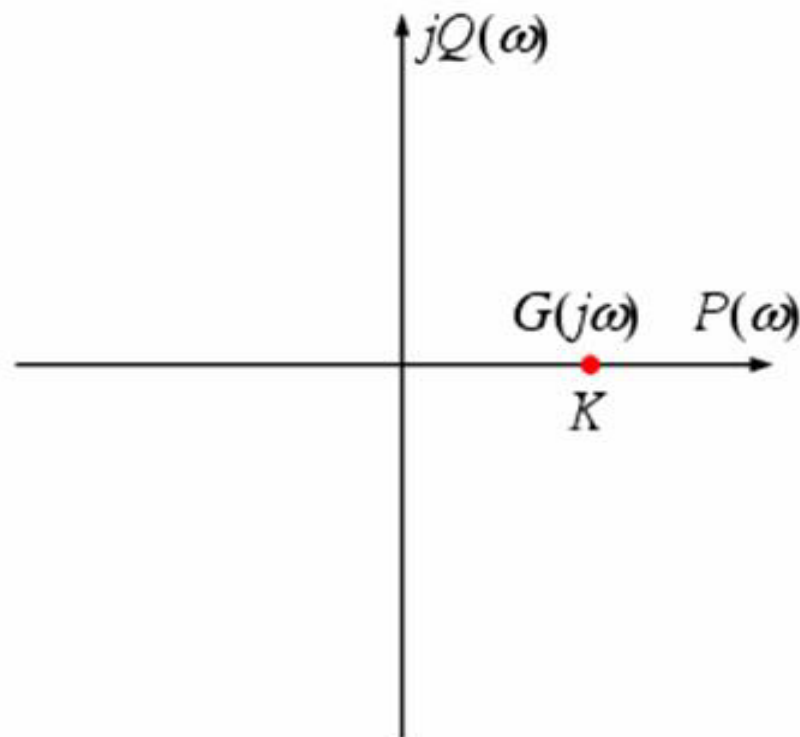
▲ Biên độ: $M(\omega) = K \quad \Rightarrow \quad L(\omega) = 20\lg K$

▲ Pha: $\varphi(\omega) = 0$

Đặc tính tần số của các khâu cơ bản: Khâu tỉ lệ



Biểu đồ Bode



Biểu đồ Nyquist

Đặc tính tần số của các khâu cơ bản: Khâu tích phân lý tưởng

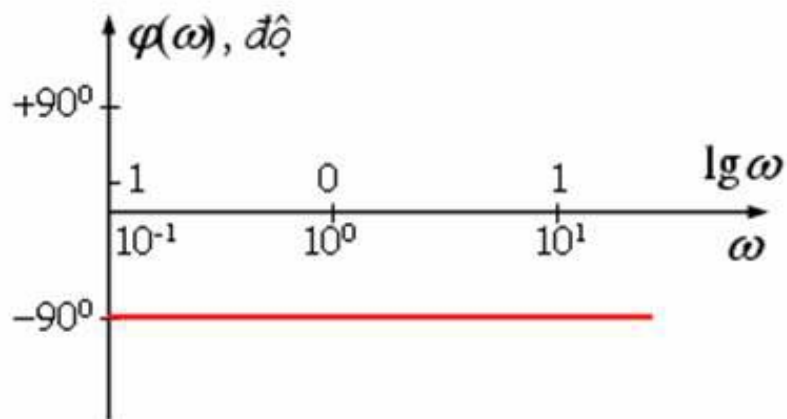
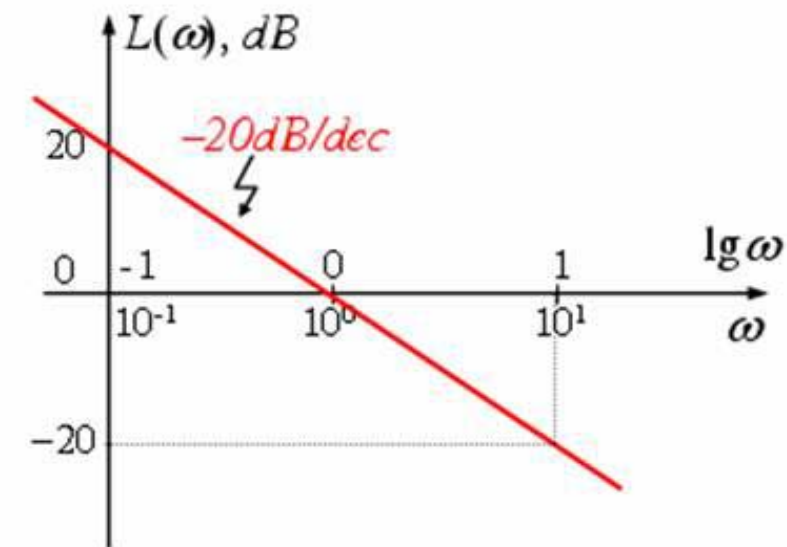
★ Hàm truyền: $G(s) = \frac{1}{s}$

★ Đặc tính tần số: $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -j \frac{1}{\omega}$

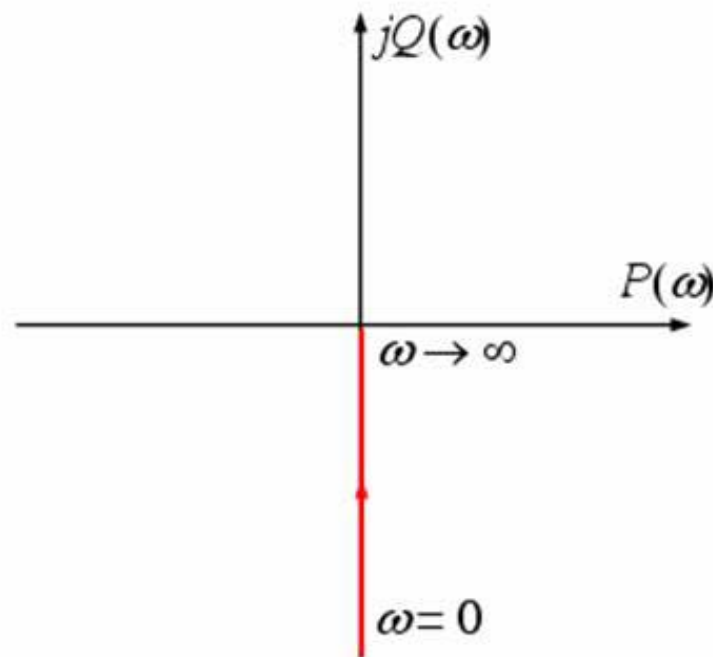
▲ Biên độ: $M(\omega) = \frac{1}{\omega} \quad \Rightarrow \quad L(\omega) = -20 \lg \omega$

▲ Pha: $\varphi(\omega) = -90^0$

Đặc tính tần số của các khâu cơ bản: Khâu tích phân lý tưởng



Biểu đồ Bode



Biểu đồ Nyquist

Đặc tính tần số của các khâu cơ bản: Khâu vi phân lý tưởng

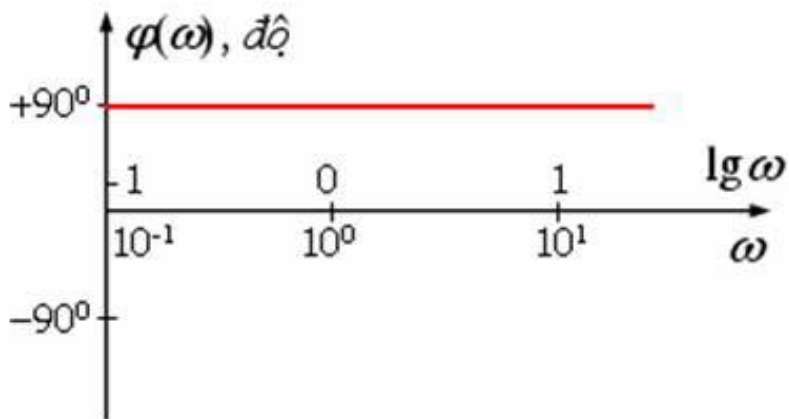
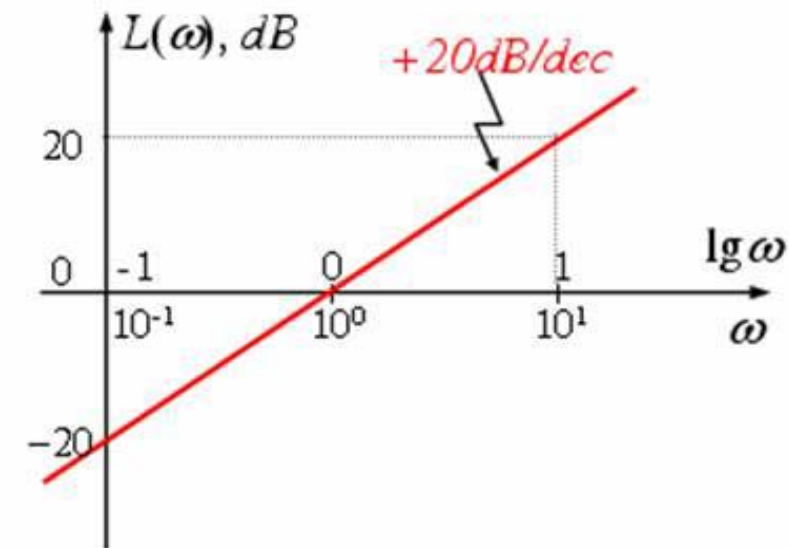
★ Hàm truyền: $G(s) = s$

★ Đặc tính tần số: $G(j\omega) = j\omega$

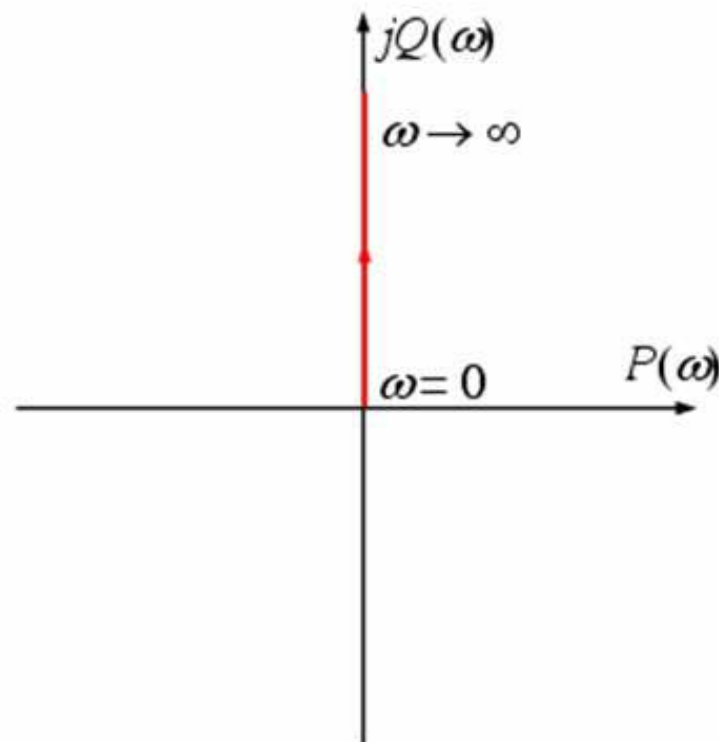
▲ Biên độ: $M(\omega) = \omega \quad \Rightarrow \quad L(\omega) = 20\lg \omega$

▲ Pha: $\varphi(\omega) = 90^\circ$

Đặc tính tần số của các khâu cơ bản: Khâu vi phân lý tưởng



Biểu đồ Bode

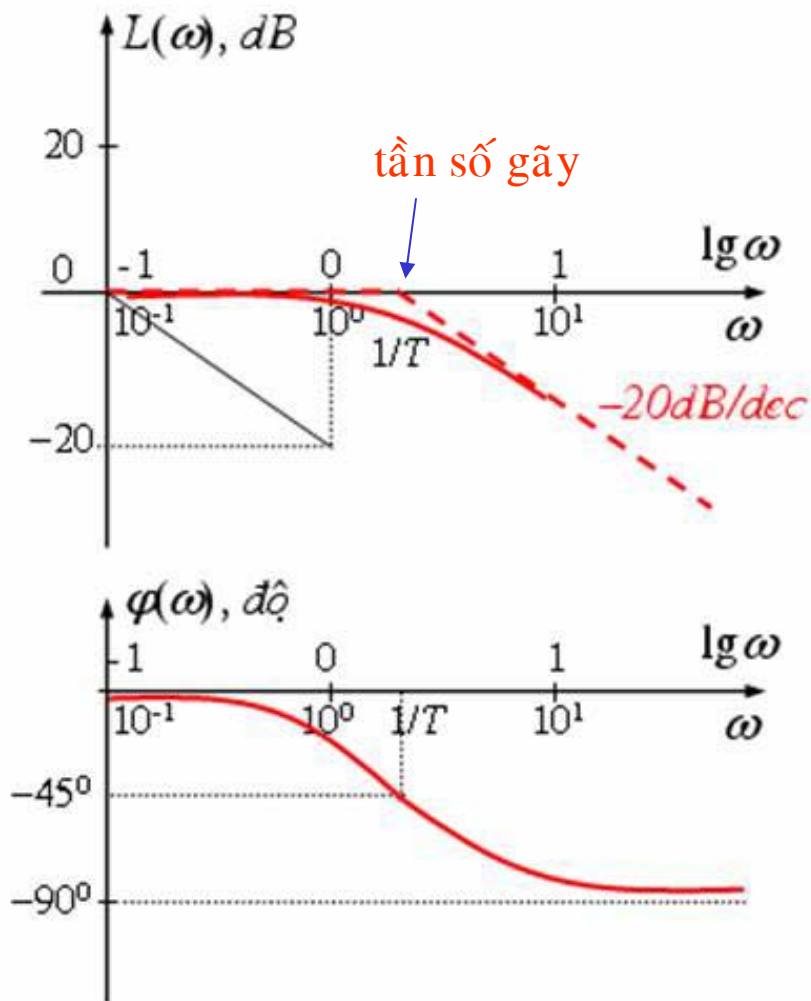


Biểu đồ Nyquist

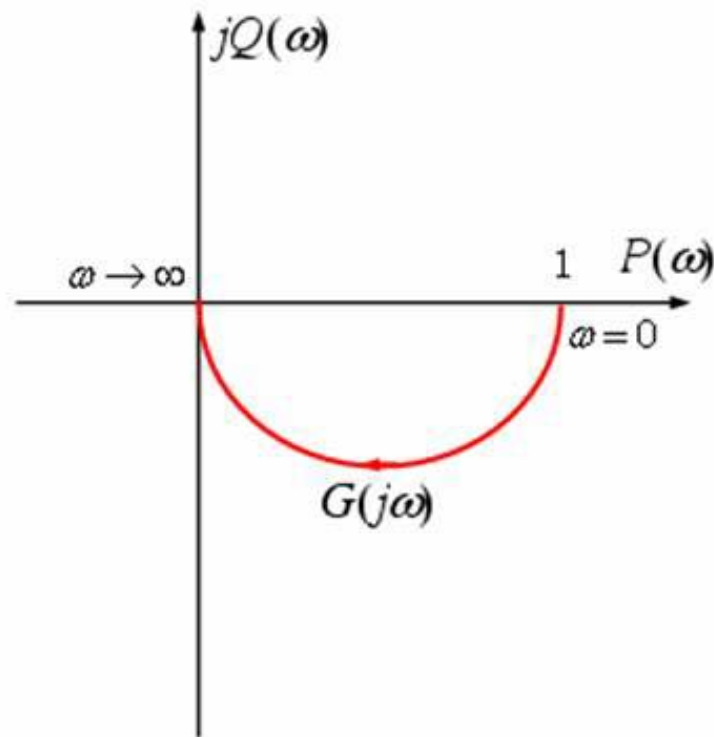
Đặc tính tần số của các khâu cơ bản: Khâu quán tính bậc 1

- ★ Hàm truyền: $G(s) = \frac{1}{Ts + 1}$
- ★ Đặc tính tần số: $G(j\omega) = \frac{1}{Tj\omega + 1} = \frac{K(1 - Tj\omega)}{1 + T^2\omega^2}$
- ♣ Biên độ: $M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} \Rightarrow L(\omega) = -20 \lg \sqrt{1 + T^2\omega^2}$
 - ♣ Pha: $\varphi(\omega) = -\operatorname{tg}^{-1}(T\omega)$
- ★ Vẽ gần đúng biểu đồ Bode biên độ:
 - ♣ $\omega < \frac{1}{T}$: đường thẳng nằm ngang trùng trục hoành
 - ♣ $\omega > \frac{1}{T}$: đường thẳng có độ dốc -20dB/dec

Đặc tính tần số của các khâu cơ bản: Khâu quán tính bậc 1



Biểu đồ Bode



Biểu đồ Nyquist

Đặc tính tần số của các khâu cơ bản: Khâu sớm pha bậc 1

★ Hàm truyền: $G(s) = Ts + 1$

★ Đặc tính tần số: $G(j\omega) = Tj\omega + 1$

▲ Biên độ: $M(\omega) = \sqrt{1 + T^2\omega^2} \Rightarrow L(\omega) = 20\lg\sqrt{1 + T^2\omega^2}$

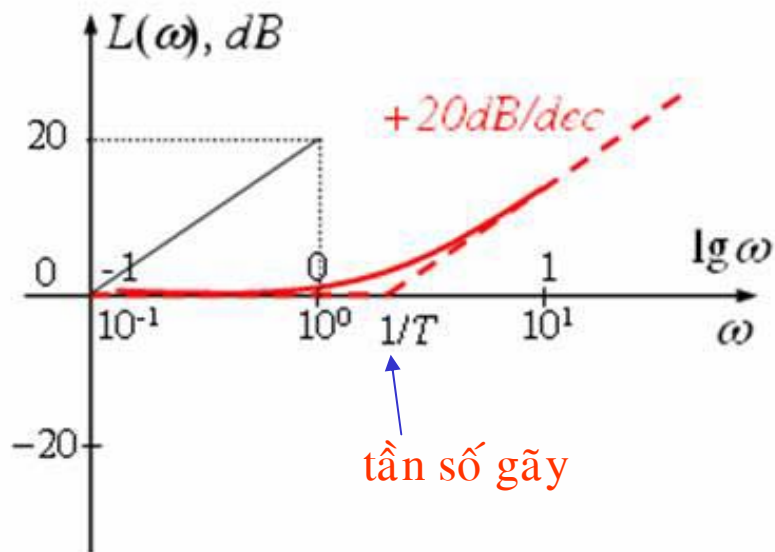
▲ Pha: $\varphi(\omega) = \text{tg}^{-1}(T\omega)$

★ Vẽ gần đúng biểu đồ Bode biên độ:

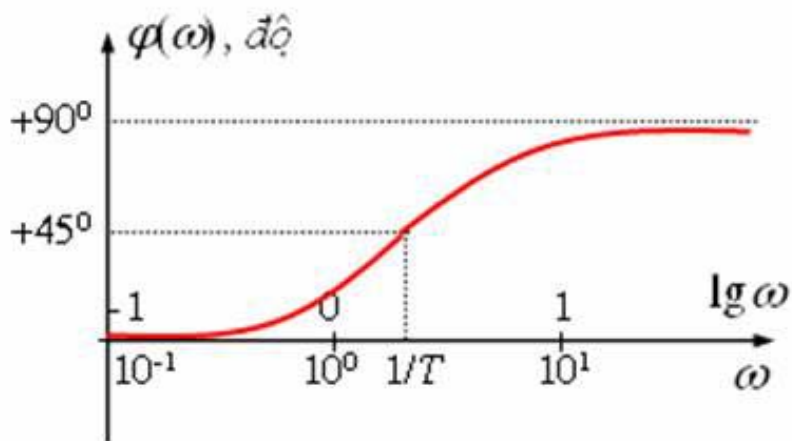
▲ $\omega < \frac{1}{T}$: đường thẳng nằm ngang trùng trục hoành

▲ $\omega > \frac{1}{T}$: đường thẳng có độ dốc +20dB/dec

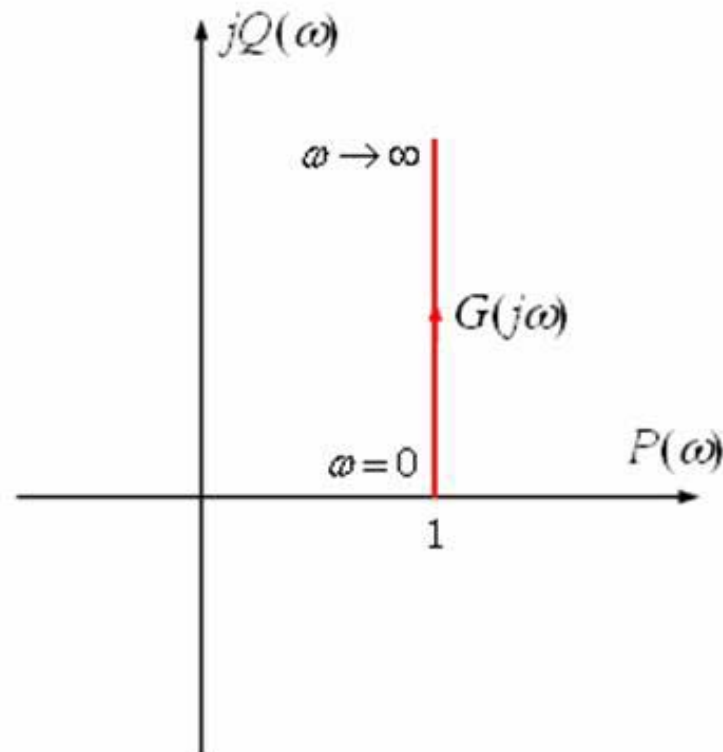
Đặc tính tần số của các khâu cơ bản: Khâu sớm pha bậc 1



tần số gãy



Biểu đồ Bode



Biểu đồ Nyquist

Đặc tính tần số của các khâu cơ bản: Khâu dao động bậc 2

★ Hàm truyền:
$$G(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1} \quad (0 < \xi < 1)$$

★ Đặc tính tần số:
$$G(j\omega) = \frac{1}{-T^2 \omega^2 + 2\xi Tj\omega + 1}$$

▲ Biên độ:
$$M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2}}$$

$\Rightarrow$
$$L(\omega) = -20 \lg \sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2}$$

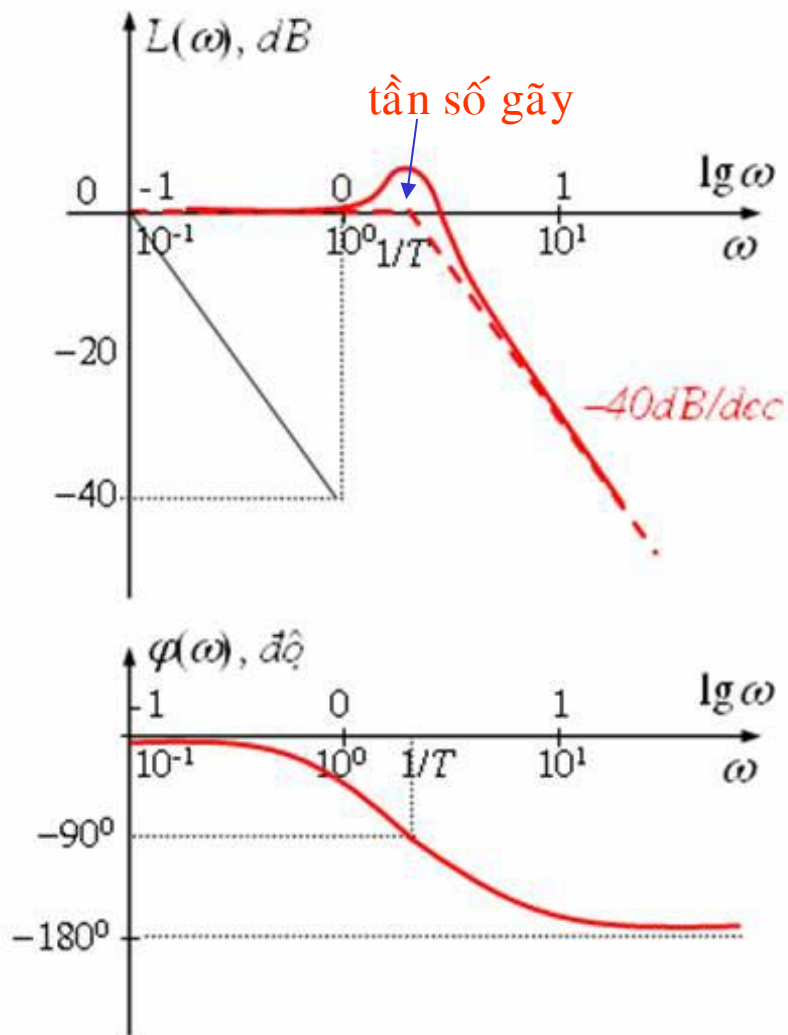
▲ Pha:
$$\varphi(\omega) = -\operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{2\xi T\omega}{1 - T^2 \omega^2} \right)$$

★ Vẽ gần đúng biểu đồ Bode biên độ:

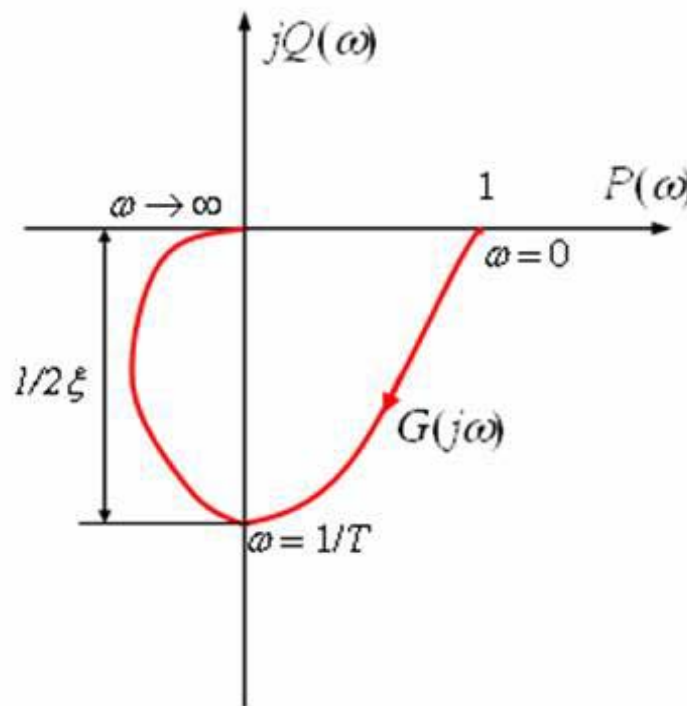
▲ $\omega < 1/T$: đường thẳng nằm ngang trùng trục hoành

▲ $\omega > 1/T$: đường thẳng có độ dốc -40dB/dec

Đặc tính tần số của các khâu cơ bản: Khâu dao động bậc 2



Biểu đồ Bode



Biểu đồ Nyquist

Đặc tính tần số của các khâu cơ bản: Khâu trì hoãn

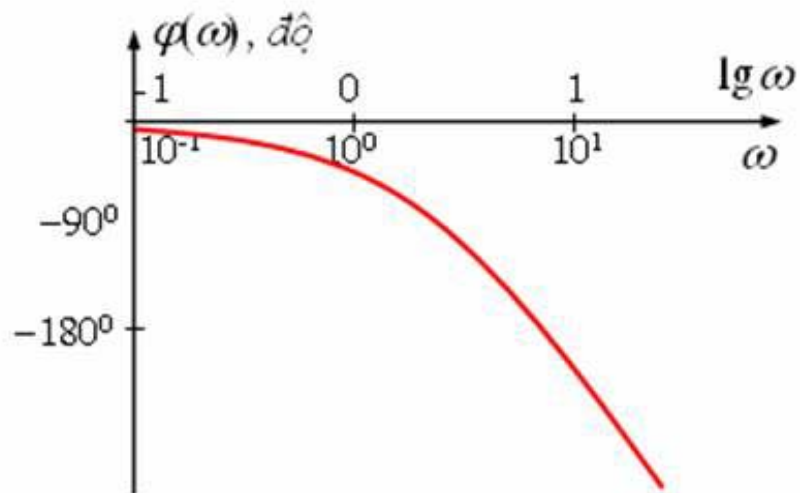
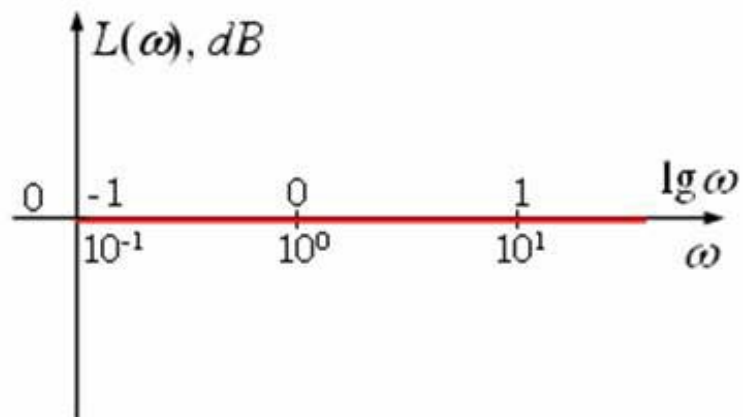
★ Hàm truyền: $G(s) = e^{-Ts}$

★ Đặc tính tần số: $G(j\omega) = e^{-Tj\omega}$

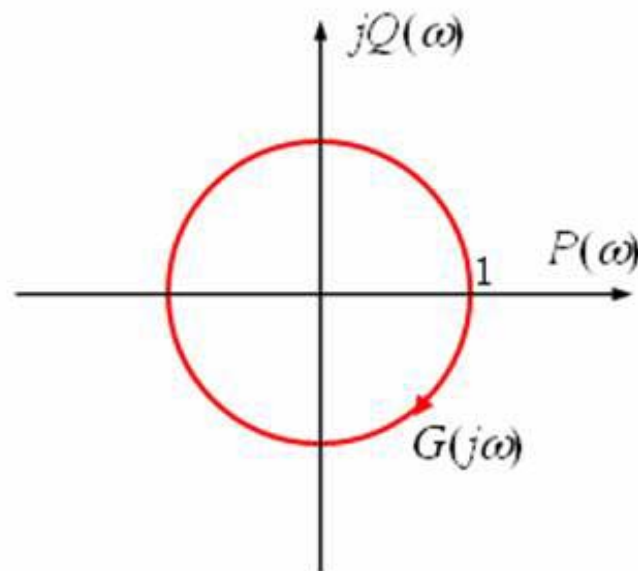
♣ Biên độ: $M(\omega) = 1 \quad \Rightarrow \quad L(\omega) = 0$

♣ Pha: $\varphi(\omega) = -T\omega$

Đặc tính tần số của các khâu cơ bản: Khâu trì hoãn



Biểu đồ Bode



Biểu đồ Nyquist

Đặc tính tần số của hệ thống

- ★ Xét hệ thống tự động có hàm truyền $G(s)$ có thể phân tích thành tích của các hàm truyền cơ bản như sau:

$$G(s) = \prod_{i=1}^l G_i(s)$$

- ★ Đặc tính tần số: $G(j\omega) = \prod_{i=1}^l G_i(j\omega)$

▲ Biên độ: $M(\omega) = \prod_{i=1}^l M_i(\omega) \Rightarrow L(\omega) = \sum_{i=1}^l L_i(\omega)$

▲ Pha: $\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^l \varphi_i(\omega)$

⇒ Biểu đồ Bode của hệ thống (gồm nhiều khâu ghép nối tiếp) bằng **tổng** biểu đồ Bode của các khâu thành phần.

Vẽ gần đúng biểu đồ Bode biên độ bằng đường tiệm cận

- ★ Giả sử hàm truyền của hệ thống có dạng:

$$G(s) = Ks^{\alpha} G_1(s)G_2(s)G_3(s)\dots$$

($\alpha > 0$: hệ thống có khâu vi phân lý tưởng)

$\alpha < 0$: hệ thống có khâu tích phân lý tưởng)

- ★ **Bước 1:** Xác định tất cả các tần số gãy $\omega_i = 1/T_i$, và sắp xếp theo thứ tự tăng dần $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 \dots$

- ★ **Bước 2:** Biểu đồ Bode gần đúng qua điểm A có tọa độ:

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 \\ L(\omega) = 20\lg K + \alpha \times 20\lg \omega_0 \end{cases}$$

ω_0 là tần số thỏa mãn $\omega_0 < \omega_1$. Nếu $\omega_1 > 1$ thì có thể chọn $\omega_0 = 1$.

Vẽ gần đúng biểu đồ Bode biên độ bằng đường tiệm cận (tt)

- ★ **Bước 3:** Qua điểm A, vẽ đường thẳng có độ dốc:
 - ▲ $(-20 \text{ dB/dec} \times \alpha)$ nếu $G(s)$ có α khâu tích phân lý tưởng
 - ▲ $(+20 \text{ dB/dec} \times \alpha)$ nếu $G(s)$ có α khâu vi phân lý tưởng
 Đường thẳng này kéo dài đến tần số gãy kế tiếp.
- ★ **Bước 4:** Tại tần số gãy $\omega_i = 1/T_i$, độ dốc của đường tiệm cận được cộng thêm một lượng:
 - ▲ $(-20 \text{ dB/dec} \times \beta_i)$ nếu $G_i(s)$ là β_i khâu quán tính bậc 1
 - ▲ $(+20 \text{ dB/dec} \times \beta_i)$ nếu $G_i(s)$ là β_i khâu sớm pha bậc 1
 - ▲ $(-40 \text{ dB/dec} \times \beta_i)$ nếu $G_i(s)$ là β_i khâu dao động bậc 2
 - ▲ $(+40 \text{ dB/dec} \times \beta_i)$ nếu $G_i(s)$ là β_i khâu sớm pha bậc 2
 Đường thẳng này kéo dài đến tần số gãy kế tiếp.
- ★ **Bước 5:** Lặp lại bước 4 cho đến khi vẽ xong đường tiệm cận tại tần số gãy cuối cùng.

Thí dụ 1: Vẽ biểu đồ Bode gần đúng

- ★ Vẽ biểu đồ Bode biên độ gần đúng của hệ thống có hàm truyền:

$$G(s) = \frac{100(0,1s + 1)}{s(0,01s + 1)}$$

Dựa vào biểu đồ Bode gần đúng, hãy xác định tần số cắt biên của hệ thống.

- ★ **Giải:**

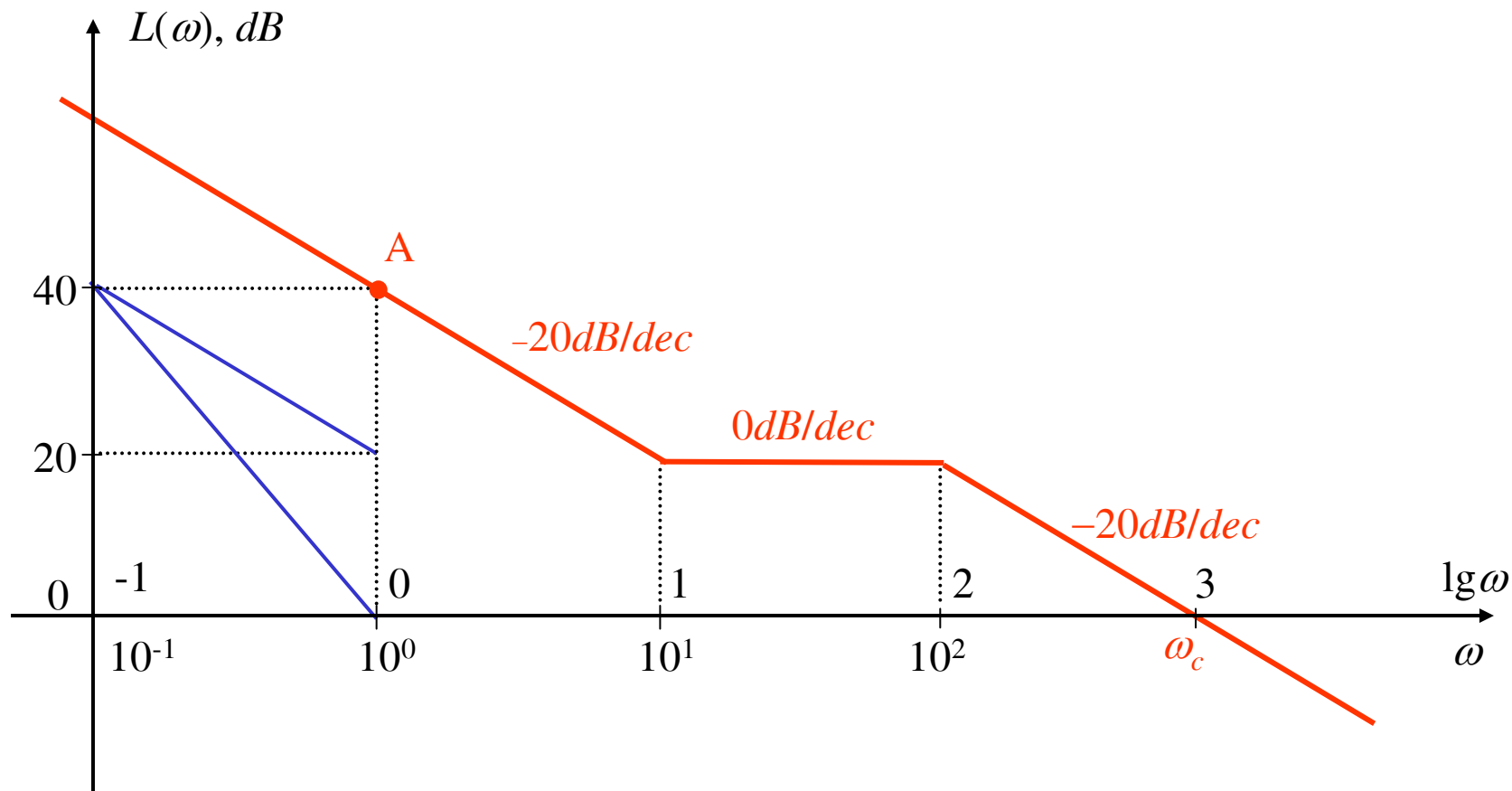
- ★ Các tần số gãy:

$$\omega_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{0,1} = 10 \text{ (rad/sec)} \qquad \omega_2 = \frac{1}{T_2} = \frac{1}{0,01} = 100 \text{ (rad/sec)}$$

- ★ Biểu đồ Bode qua điểm A có tọa độ

$$\begin{cases} \omega = 1 \\ L(\omega) = 20 \lg K = 20 \lg 100 = 40 \end{cases}$$

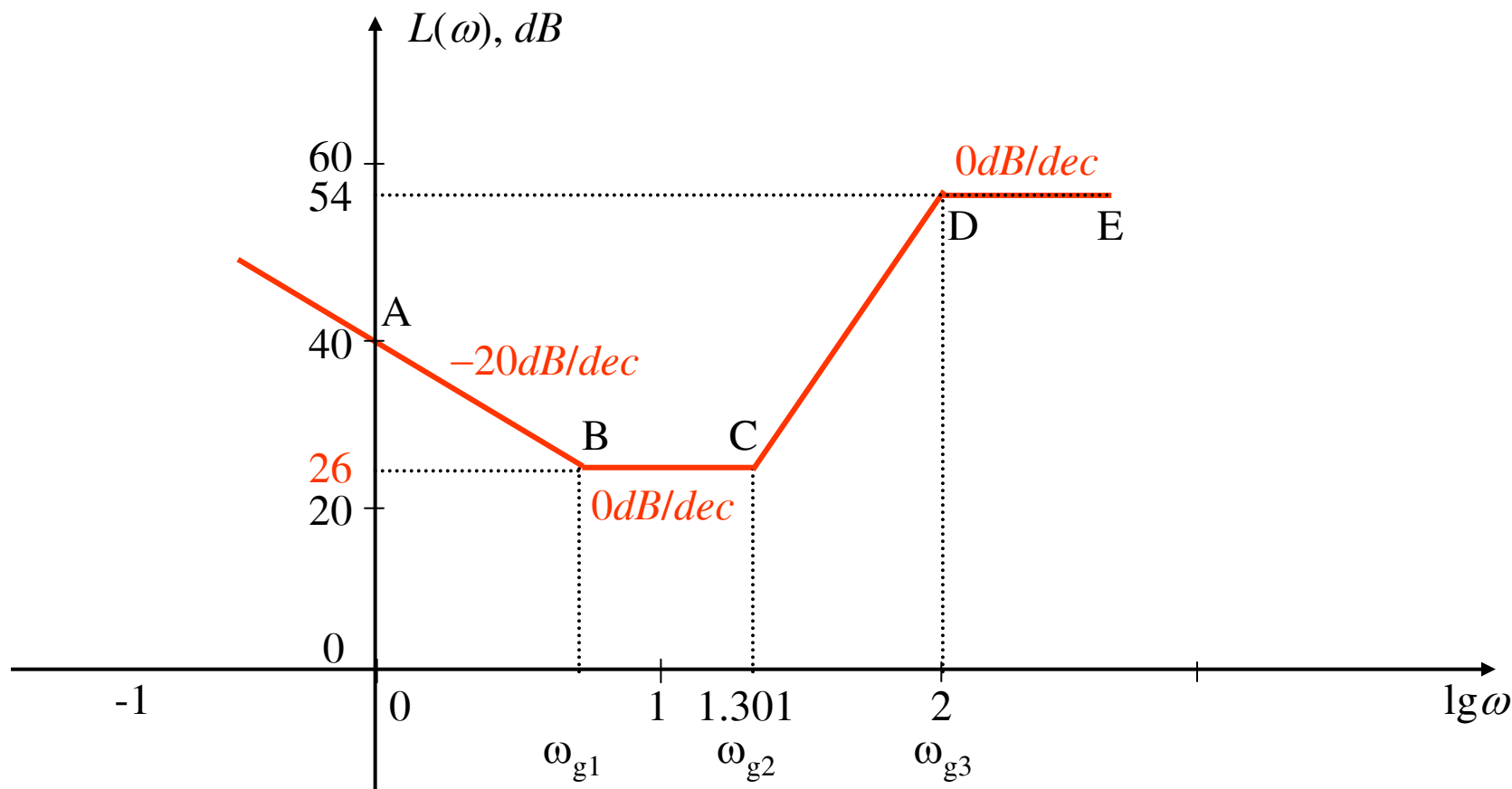
Thí dụ 1 (tt)



★ Theo hình vẽ, tần số cắt biên của hệ thống là 10^3 rad/sec

Thí dụ 2: Xác định hàm truyền dựa vào biểu đồ Bode

- ★ Xác định hàm truyền của hệ thống có biểu đồ Bode biên độ gần đúng như sau:



Thí dụ 2 (tt)

★ Độ dốc đoạn CD: $\frac{54 - 26}{2 - 1.301} = +40 \text{ (dB/dec)}$

★ Các tần số gãy:

$$\lg \omega_{g1} = 0 + \frac{40 - 26}{20} = 0.7 \quad \Rightarrow \quad \omega_{g1} = 10^{0.7} = 5 \text{ (rad/sec)}$$

$$\lg \omega_{g2} = 1.301 \quad \Rightarrow \quad \omega_{g2} = 10^{1.301} = 20 \text{ (rad/sec)}$$

$$\lg \omega_{g3} = 2 \quad \Rightarrow \quad \omega_{g3} = 10^2 = 100 \text{ (rad/sec)}$$

★ Hàm truyền cần tìm có dạng: $G(s) = \frac{K(T_1s + 1)(T_2s + 1)^2}{s(T_3s + 1)^2}$

$$20 \lg K = 40 \quad \Rightarrow \quad K = 100$$

$$T_1 = \frac{1}{\omega_{g1}} = \frac{1}{5} = 0.2 \quad T_2 = \frac{1}{\omega_{g2}} = \frac{1}{20} = 0.05 \quad T_3 = \frac{1}{\omega_{g3}} = \frac{1}{100} = 0.01$$

Các thông số quan trọng của đặc tính tần số

- ★ **Tần số cắt biên (ω_c):** là tần số mà tại đó biên độ của đặc tính tần số bằng 1 (hay bằng 0 dB).

$$M(\omega_c) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad L(\omega_c) = 0$$

- ★ **Tần số cắt pha ($\omega_{-\pi}$):** là tần số mà tại đó pha của đặc tính tần số bằng -180^0 (hay bằng $-\pi$ radian).

$$\varphi(\omega_{-\pi}) = -180^0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(\omega_{-\pi}) = -\pi \text{ rad}$$

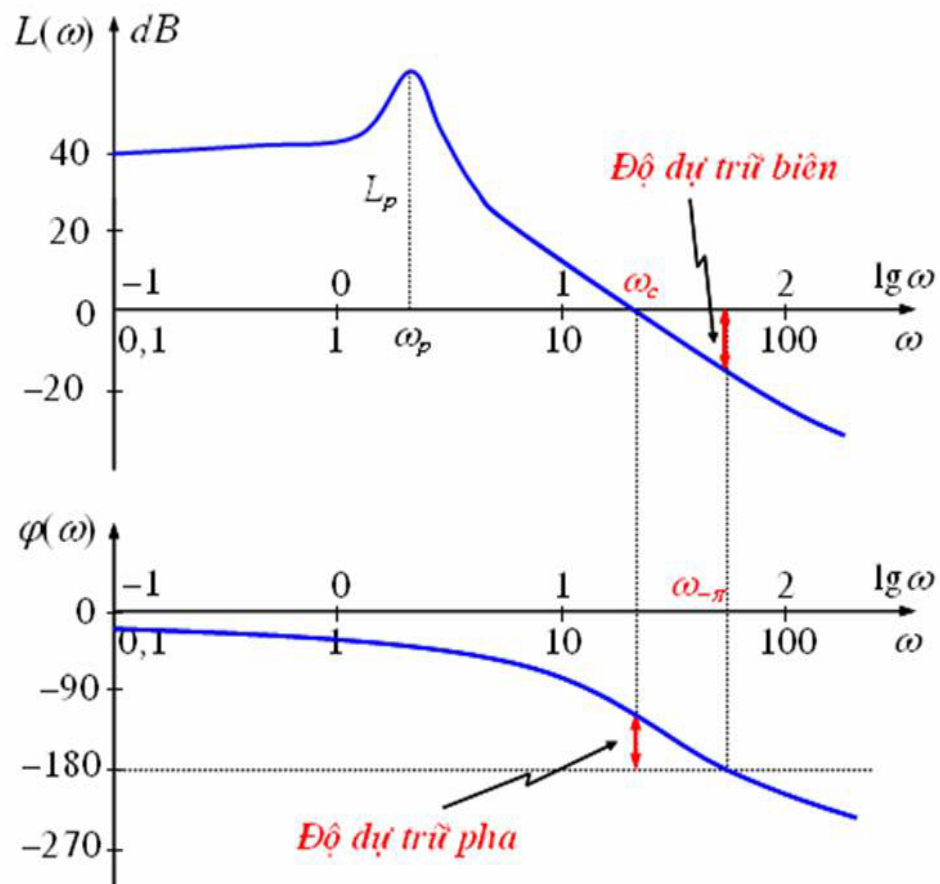
- ★ **Độ dự trữ biên (GM – Gain Margin):**

$$GM = \frac{1}{M(\omega_{-\pi})} \quad \Leftrightarrow \quad GM = -L(\omega_{-\pi}) \quad [\text{dB}]$$

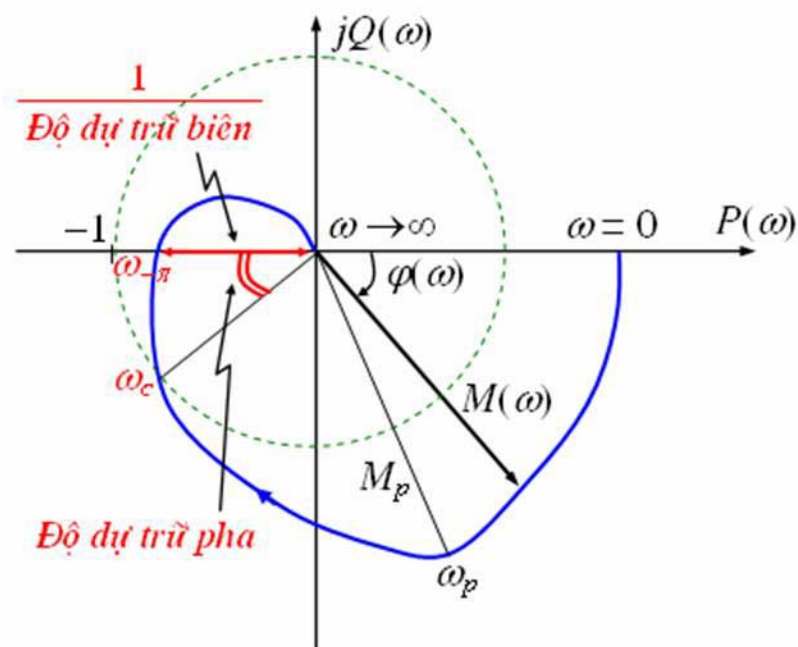
- ★ **Độ dự trữ pha (ΦM – Phase Margin):**

$$\Phi M = 180^0 + \varphi(\omega_c)$$

Biểu đồ Bode

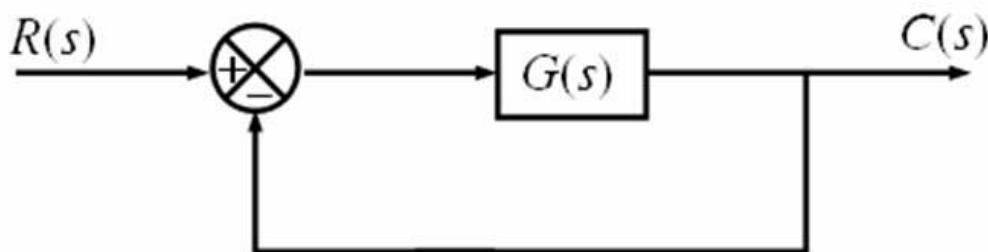


Biểu đồ Nyquist



Tiêu chuẩn ổn định Nyquist

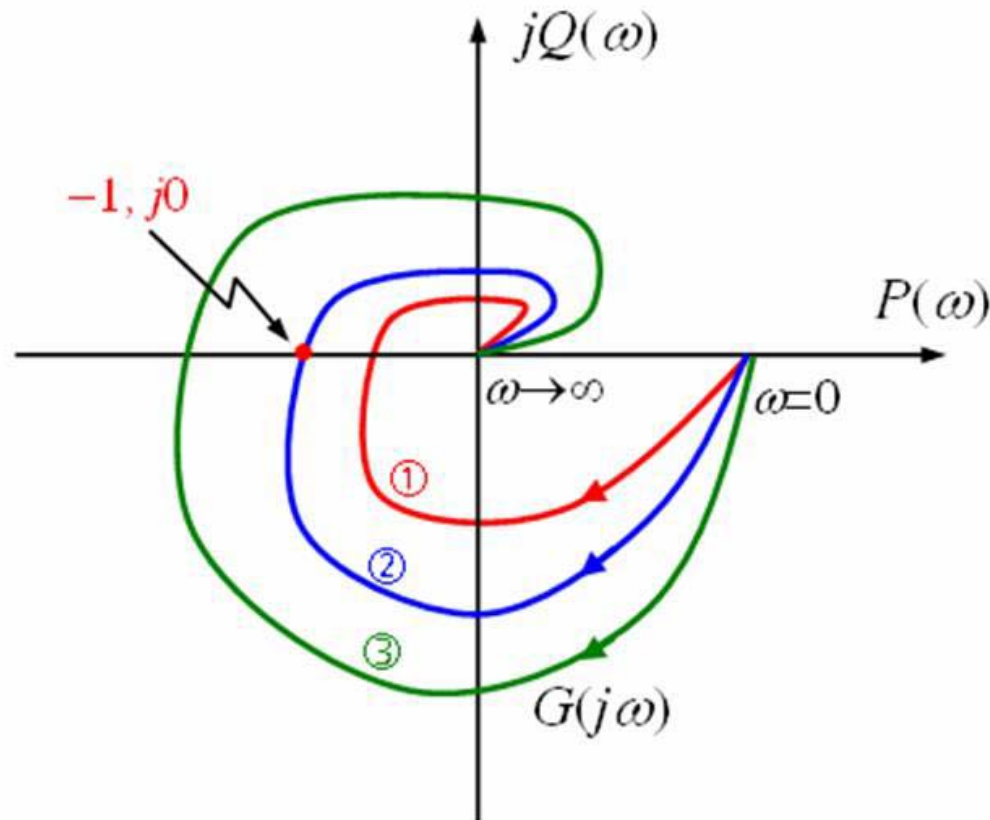
- ★ Cho hệ thống hồi tiếp âm đơn vị, biết đặc tính tần số của hệ hở $G(s)$, bài toán đặt ra là xét tính ổn định của hệ thống kín $G_k(s)$.



- ★ **Tiêu chuẩn Nyquist:** Hệ thống kín $G_k(s)$ ổn định nếu đường cong Nyquist của hệ hở $G(s)$ bao điểm $(-1, j0)$ $l/2$ vòng theo chiều dương (ngược chiều kim đồng hồ) khi ω thay đổi từ 0 đến $+\infty$, trong đó l là số cực nằm bên phải mặt phẳng phức của hệ hở $G(s)$.

Tiêu chuẩn ổn định Nyquist: Thí dụ 1

- ★ Cho hệ thống hồi tiếp âm đơn vị, trong đó hệ hở $G(s)$ có đường cong Nyquist như hình vẽ. Biết rằng $G(s)$ ổn định. Xét tính ổn định của hệ thống kín.



Tiêu chuẩn ổn định Nyquist: Thí dụ 1 (tt)**★ Giải:**

Vì $G(s)$ ổn định nên $G(s)$ không có cực nằm bên phải mặt phẳng phức, do đó theo tiêu chuẩn Nyquist hệ kín ổn định nếu đường cong Nyquist $G(j\omega)$ của hệ hở không bao điểm $(-1, j0)$

- ★ Trường hợp ①: $G(j\omega)$ không bao điểm $(-1, j0) \Rightarrow$ hệ kín ổn định.
- ★ Trường hợp ②: $G(j\omega)$ qua điểm $(-1, j0) \Rightarrow$ hệ kín ở biên giới ổn định;
- ★ Trường hợp ③: $G(j\omega)$ bao điểm $(-1, j0) \Rightarrow$ hệ kín không ổn định.

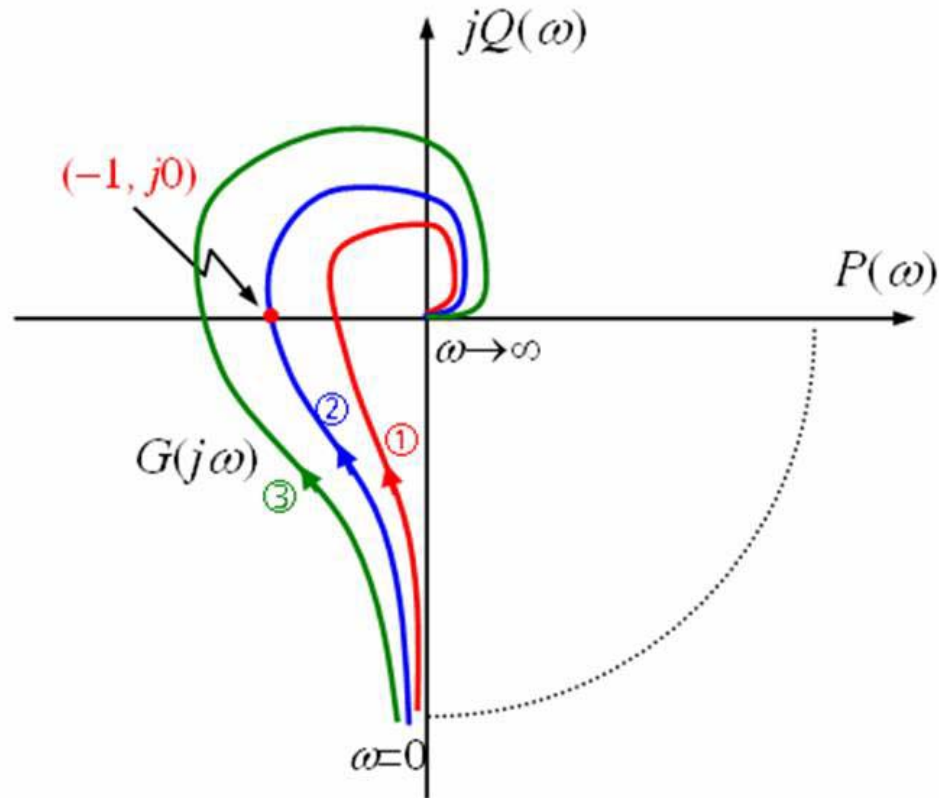
Tiêu chuẩn ổn định Nyquist: Thí dụ 2

★ Hãy đánh giá tính ổn định của hệ thống hồi tiếp âm đơn vị, biết

rằng hàm truyền hệ hở $G(s)$ là:
$$G(s) = \frac{K}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)(T_3s + 1)}$$

★ Giải:

★ Biểu đồ Nyquist:



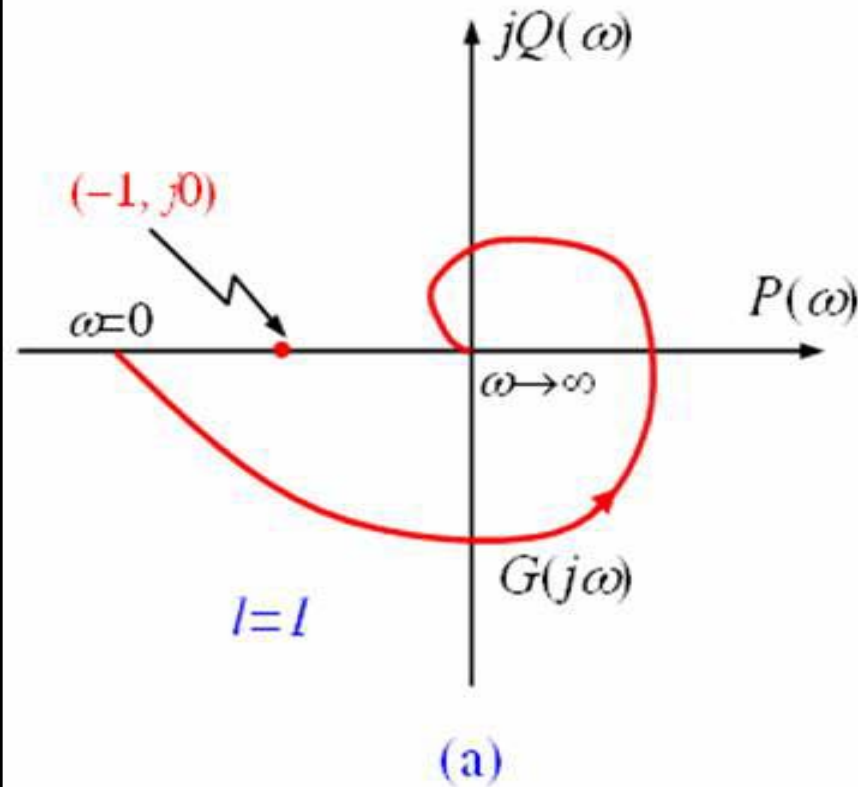
Tiêu chuẩn ổn định Nyquist: Thí dụ 2 (tt)

Vì $G(s)$ không có cực nằm bên phải mặt phẳng phức, do đó theo tiêu chuẩn Nyquist hệ kín ổn định nếu đường cong Nyquist $G(j\omega)$ của hệ hở không bao điểm $(-1, j0)$

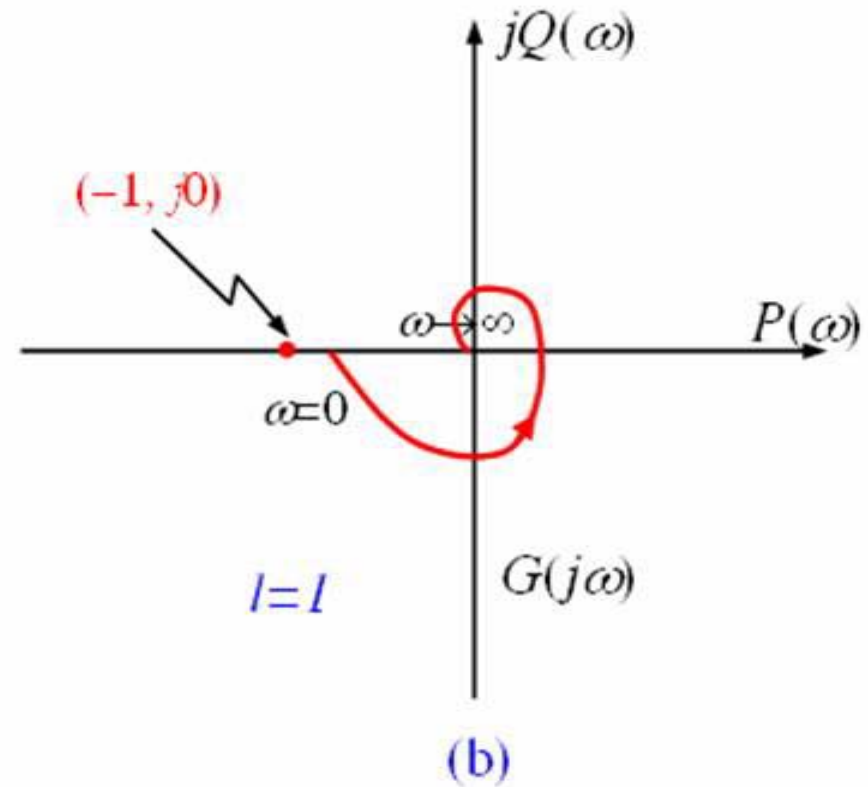
- ★ Trường hợp ①: $G(j\omega)$ không bao điểm $(-1, j0) \Rightarrow$ hệ kín ổn định.
- ★ Trường hợp ②: $G(j\omega)$ qua điểm $(-1, j0) \Rightarrow$ hệ kín ở biên giới ổn định;
- ★ Trường hợp ③: $G(j\omega)$ bao điểm $(-1, j0) \Rightarrow$ hệ kín không ổn định.

Tiêu chuẩn ổn định Nyquist: Thí dụ 3

Cho hệ thống hở **không ổn định** có đặc tính tần số như các hình vẽ dưới đây. Hỏi trường hợp nào hệ kín ổn định.



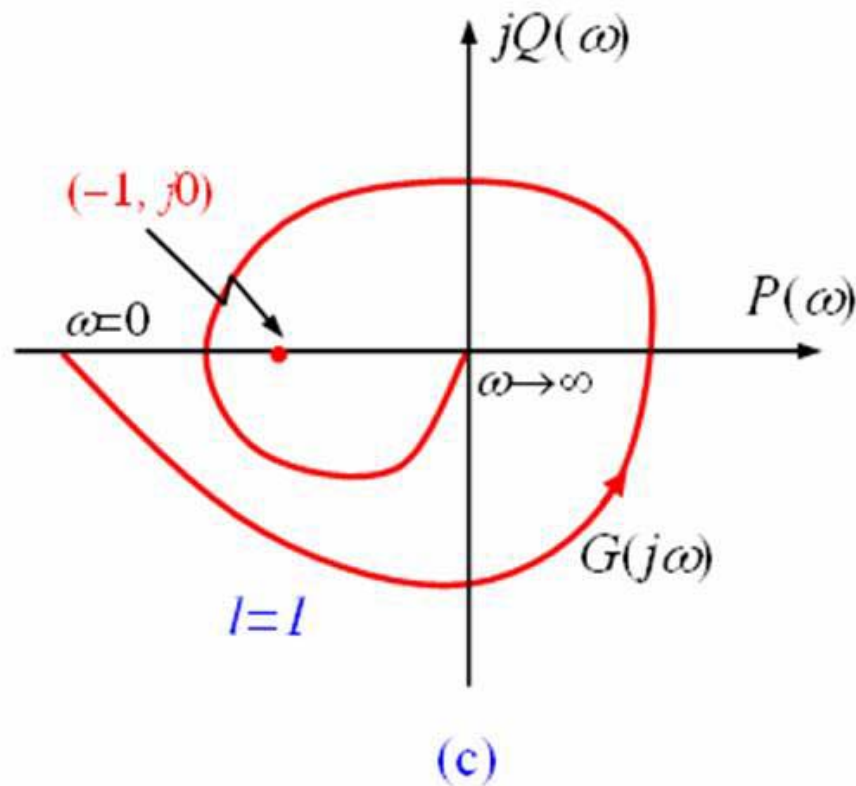
Ổn định



Không ổn định

Tiêu chuẩn ổn định Nyquist: Thí dụ 3 (tt)

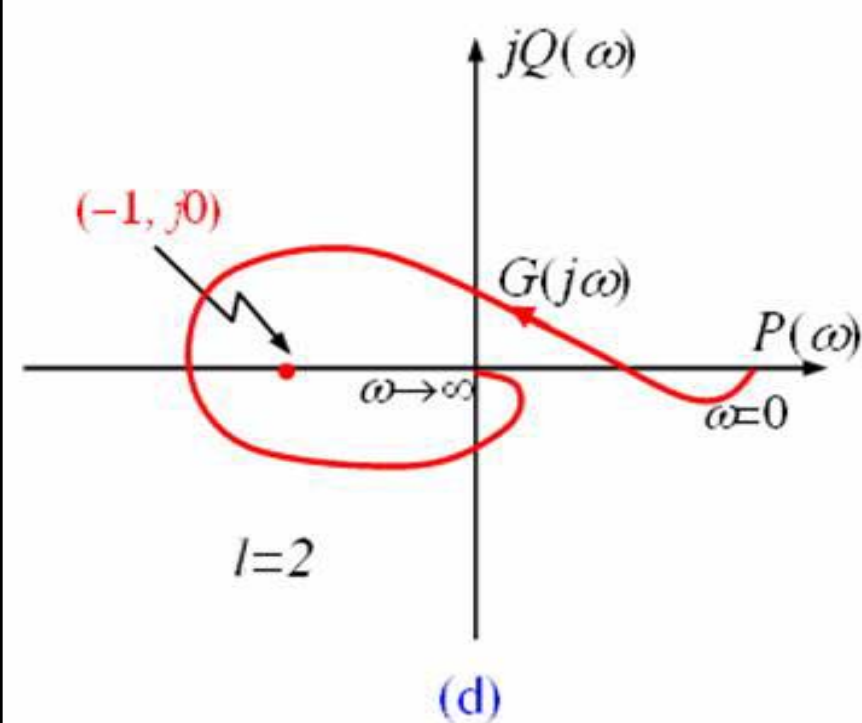
Cho hệ thống hở **không ổn định** có đặc tính tần số như các hình vẽ dưới đây. Hỏi trường hợp nào hệ kín ổn định.



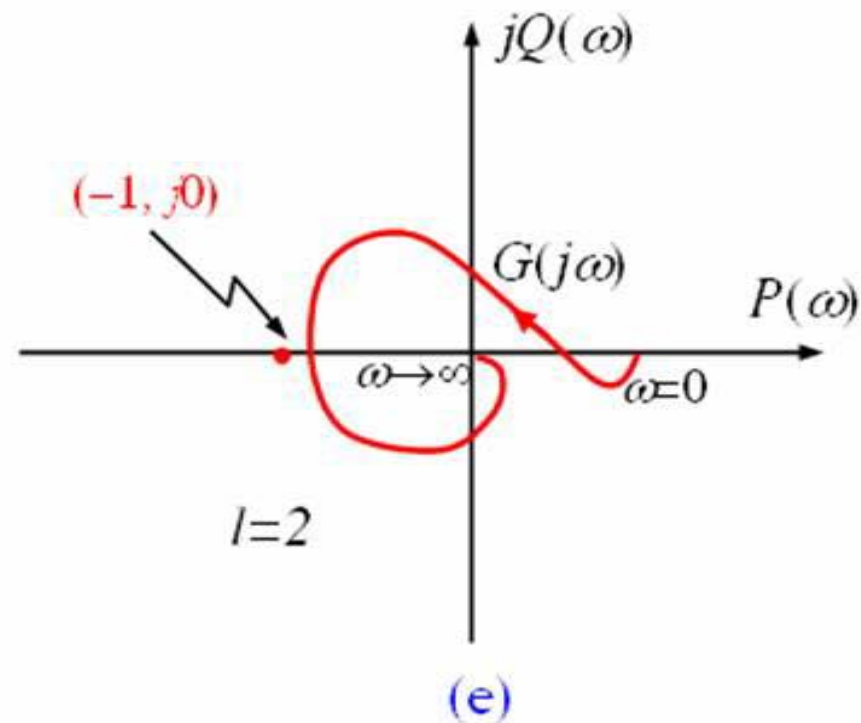
Không ổn định

Tiêu chuẩn ổn định Nyquist: Thí dụ 3 (tt)

Cho hệ thống hở **không ổn định** có đặc tính tần số như các hình vẽ dưới đây. Hỏi trường hợp nào hệ kín ổn định.



Ổn định



Không ổn định

Tiêu chuẩn ổn định Nyquist: Thí dụ 4

★ Cho hệ thống hở có hàm truyền đạt là:

$$G(s) = \frac{K}{(Ts + 1)^n} \quad (K > 0, T > 0, n > 2)$$

Tìm điều kiện của K và T để hệ thống kín (hồi tiếp âm đơn vị) ổn định.

★ Giải:

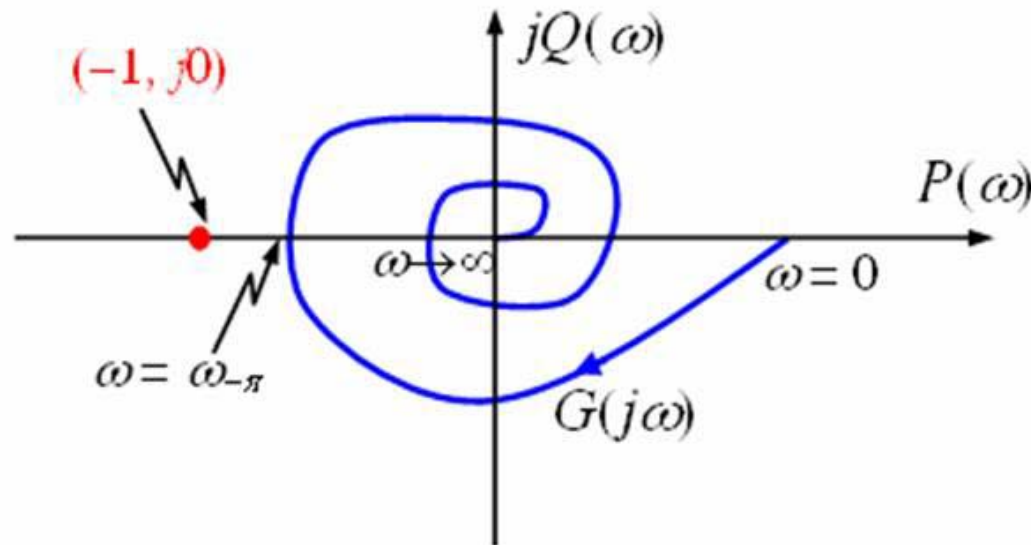
★ Đặc tính tần số của hệ thống là: $G(j\omega) = \frac{K}{(Tj\omega + 1)^n}$

♣ Biên độ: $M(\omega) = \frac{K}{\left(\sqrt{T^2\omega^2 + 1}\right)^n}$

♣ Pha: $\varphi(\omega) = -ntg^{-1}(T\omega)$

Tiêu chuẩn ổn định Nyquist: Thí dụ 4 (tt)

★ Biểu đồ Nyquist:



★ Điều kiện ổn định: đường cong Nyquist không bao điểm $(-1, j0)$.
Theo biểu đồ Nyquist, điều này xảy ra khi:

$$M(\omega_{-\pi}) < 1$$

Tiêu chuẩn ổn định Nyquist: Thí dụ 4 (tt)

★ Ta có: $\varphi(\omega_{-\pi}) = -n \operatorname{tg}^{-1}(T\omega_{-\pi}) = -\pi$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}^{-1}(T\omega_{-\pi}) = \frac{\pi}{n} \Rightarrow (T\omega_{-\pi}) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

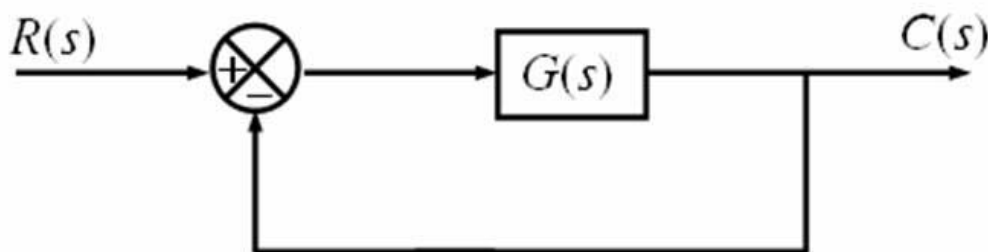
$$\Rightarrow \omega_{-\pi} = \frac{1}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

★ Do đó: $M(\omega_{-\pi}) < 1 \Leftrightarrow \frac{K}{\left(\sqrt{T^2 \left[\frac{1}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)\right]^2 + 1}\right)^n} < 1$

$$\Leftrightarrow K < \left(\sqrt{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{n}\right) + 1}\right)^n$$

Tiêu chuẩn ổn định Bode

- ★ Cho hệ thống hồi tiếp âm đơn vị, biết đặc tính tần số của hệ hở $G(s)$, bài toán đặt ra là xét tính ổn định của hệ thống kín $G_k(s)$.

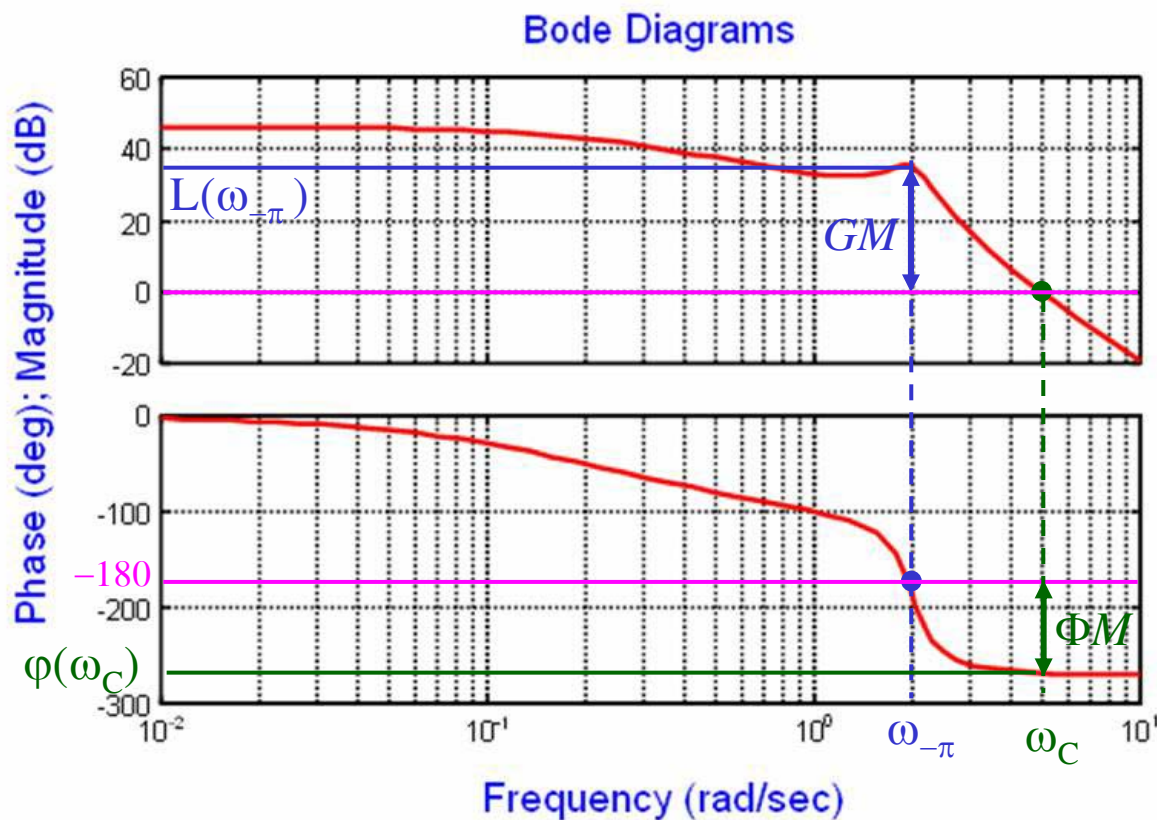


- ★ **Tiêu chuẩn Bode:** Hệ thống kín $G_k(s)$ ổn định nếu hệ thống hở $G(s)$ có độ dự trữ biên và độ dự trữ pha dương:

$$\begin{cases} GM > 0 \\ \Phi M > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{Hệ thống ổn định}$$

Tiêu chuẩn ổn định Bode: Thí dụ

- ★ Cho hệ thống hồi tiếp âm đơn vị, biết rằng hệ hở có biểu đồ Bode như hình vẽ. Xác định độ dự trữ biên, độ dự trữ pha của hệ thống hở. Hỏi hệ kín có ổn định không?



Theo biểu đồ Bode:

$$\omega_c = 5$$

$$\omega_{-\pi} = 2$$

$$L(\omega_{-\pi}) = 35dB$$

$$\phi(\omega_c) = -270^\circ$$

$$GM = -35dB$$

$$\Phi M = 180^\circ + (-270^\circ) = -90^\circ$$

Do $GM < 0$ và $\Phi M < 0$ nên hệ thống kín không ổn định.

Chú ý

- ★ Trường hợp hệ thống hồi tiếp âm như hình vẽ, vẫn có thể áp dụng tiêu chuẩn ổn định Nyquist hoặc Bode, trong trường hợp này hàm truyền hở là $G(s)H(s)$.

